

具阶段结构捕食开发模型的全局渐近行为^{*}

欧柳曼, 李怡平

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 考虑一类具有阶段结构捕食开发模型, 运用特征根分析法和迭代法得到了系统惟一正平衡点全局渐近稳定的简练条件, 进一步分析了最优收获策略问题。并举例说明所得结论。

关键词: 捕食; 开发; 阶段结构; 全局渐近行为

中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 03-0005-05

曾受众多学者关注的典型的两种群捕食被捕食 V—L 系统^[1,2]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(b_1 - D_1 x(t) + k\theta y(t)), \\ \dot{y}(t) = y(t)(b_2 - \theta x(t) - D_2 y(t)) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\frac{d}{dt}$ (适用全文), $b_i > 0, D_i > 0 (i = 1, 2), k > 0, \theta > 0$, 假设种群个体在整个生命阶段具有相同的密度制约率, 相同的生育能力, 相同的捕食能力, 这显然不符合现实。因为很多种群成年才具有生育能力; 个体在各个生命阶段的捕食能力也有差异, 有些幼体没有捕食能力, 靠其父母抚养, 有些幼体捕获能力较弱, 往往将其忽略, 也认为幼体由其父母抚养。因此很必要在捕食模型中引入阶段结构。

近年来, 不少学者从事对具有多个生命阶段的种群模型的建模和研究工作^[3-6]。其中 Aiello 与 Freedman 在文 [3] 中提出著名的具阶段结构单种群生长模型

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \alpha x_m(t) - \gamma x_i(t) - \alpha e^{-\gamma\tau} x_m(t - \tau), \\ \dot{x}_m(t) = \alpha e^{-\gamma\tau} x_m(t - \tau) - \beta x_m^2(t), \end{cases} \quad t > \tau \quad (2)$$

并得到了一个近乎完美的结论, 即若 $x_m(0) > 0, x_i(t) > 0 (-\tau \leq t \leq 0)$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x_i(t), x_m(t)] = (x_i^*, x_m^*)$, 其中 (x_i^*, x_m^*) 是系统 (2) 的惟一正平衡点。这表明阶段结构不但影响着种群的持续生存, 且在一定条件下能最大化种群的总容量。

欧柳曼等^[6]提出将捕食者和食饵都分为幼体和成体两个生命阶段, 幼体发育成熟需要一段时间 (成熟期即时滞) 的自治系统 ([6, (1) 式]), 得到正平衡点的全局渐近稳定条件, 揭示了种群随时间的演变规律, 然而种群生态学的另一主要问题是如何实施人工干预对种群进行保护、开发和利用, 使得生态系统持续生存。

因此, 可更新资源的开发和管理成为一个非常重要的研究课题而受到许多学者的关注, 但对阶段结构的开发模型的研究尚不多见^[4]。文 [4] 将捕食者分为幼体和成体两种群, 而食饵没有多个生命阶段, 只有成年捕食者具有捕食能力并被收获的自治系统 ([4, (2.1) 式]), 得到系统 3 个非负平衡点全局渐近稳定的条件, 从而确定收获成年种群的阈值和一个最优时滞 τ^* 使得总群量最大。这可解释为在给定环境中, 改变成熟时间能得到最大的稳定种群量, 这是一种进化策略。

受文 [4, 6] 的启发, 本文将考虑一类具阶段结构的捕食开发模型。

1 模型与引理

考虑如下一类捕食者和食饵都带阶段结构并且收获成年捕食者, 放养幼年食饵的两种群捕食开发模型

* 收稿日期: 2003—06—18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371135)

作者简介: 欧柳曼 (1977 年生), 女, 博士生; 通讯联系人: 李怡平; E-mail: mcp02olm@student.zsu.edu.cn

$$\begin{cases} x_1(t) = b_1 e^{-d_1 \tau_1} x_1(t - \tau_1) - D_1 x_1^2(t) + k \theta x_1(t) y_1(t) - E x_1(t), \\ x_2(t) = b_1 x_1(t) - d_1 x_2(t) - b_1 e^{-d_1 \tau_1} x_1(t - \tau_1), \\ y_1(t) = b_2 e^{-d_2 \tau_2} y_1(t - \tau_2) - D_2 y_1^2(t) - \theta x_1(t) y_1(t) + F e^{-d_2 \tau_2}, \\ y_2(t) = b_2 y_1(t) - d_2 y_2(t) - b_2 e^{-d_2 \tau_2} y_1(t - \tau_2) + F - F e^{-d_2 \tau_2}, (t \geq 0), \\ (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) > 0, \\ (-\tau_i \leq t \leq 0, i = 1, 2) \end{cases} \quad (3)$$

这里种群 1 和种群 2 分别表示捕食种群和食饵种群。 $x_i(t), y_i(t)$ 分别表示种群 i 成体和幼体在时刻 t 的量(密度或数量)。 τ_i 表示种群 i 幼体从其出生到成熟所需要的时间长度, 即成熟期。模型(3)是在下列假设下推导出来的。

(A1) 幼体无生育能力。种群 i 幼体的出生率与其存活的成年量成比例, 比例系数为常数 $b_i > 0$ 。

(A2) 种群 i 幼体的死亡率与其存活的幼年量成正比, 比例系数为常数 $d_i > 0$ 。

(A3) 成年种群的死亡率具有 Logistic 性质, 即与该种群量的平方成正比, 比例常数为 $D_i > 0$ 。

(A4) 成年捕食者具有捕食能力, 幼年捕食者没有捕食能力, 并且成年捕食者仅能捕食成年食饵, 不能捕食幼年食饵。这种假设是合理的。因为许多幼年动物都隐蔽在山洞里, 主要靠它们父母抚养或其它营养生长, 捕食者捕食幼年食饵可忽略不计。系数 $k > 0, \theta > 0$ 。

(A5) 种群 i 在 $t - \tau_i$ 时刻出生的幼体能够存活到 t 时刻并且从幼年转化为成年。

(A6) E 是收获努力量, $F - F e^{-d_2 \tau_2}$ 为投放幼年食饵量。

为保证正初始条件的连续性, 不妨假设

$$x_2(0) = \int_{-\tau_1}^0 b_1 e^{d_1 s} \varphi_1(s) ds, \quad y_2(0) = \int_{-\tau_2}^0 b_2 e^{d_2 s} \psi_1(s) ds$$

下面先给出在证明主要结论时要用到的一些预备知识。

引理 1 系统(3)满足正初始条件的解对 $t \geq 0$ 都是正的并且有界。

引理 1 的证明类似于文[6, 定理 2.1] 的证明, 故此略。

引理 2^[7] 对方程 $\dot{x}(t) = bx(t - \tau) - a_1 x(t) - a_2 x^2(t)$, 其中 $b, a_2, \tau > 0, a_1 \geq 0, x(t) > 0 (-\tau \leq t \leq 0)$, 则有

$$(1) \text{ 若 } b > a_1, \text{ 则 } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{b - a_1}{a_2};$$

$$(2) \text{ 若 } a_1 \geq b, \text{ 则 } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

2 平衡点的渐近行为

在系统(3)中, 令 $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$, 易求得系统的一个非负平衡点 $E_0(0, 0, y_1^0, y_2^0)$, 其中

$$y_1^0 = \frac{b_2 e^{-d_2 \tau_2} + \sqrt{b_2^2 e^{-2d_2 \tau_2} + 4D_2 F e^{-d_2 \tau_2}}}{2D_2}, \quad y_2^0 = \frac{(b_2 - b_2 e^{-d_2 \tau_2}) y_1^0 + F - F e^{-d_2 \tau_2}}{d_2}$$

和在条件 $b_1 e^{-d_1 \tau_1} + k \theta y_1^* > E$ 下的惟一正平衡点 $E^*(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$, 其中

$$x_1^* = \frac{b_1 e^{-d_1 \tau_1} + k \theta y_1^* - E}{D_1}, \quad x_2^* = \frac{b_1 - b_1 e^{-d_1 \tau_1}}{d_1} x_1^*, \quad \Delta = D_1 b_2 e^{-d_2 \tau_2} - \theta (b_1 e^{-d_1 \tau_1} - E),$$

$$y_1^* = \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4D_1 F e^{-d_2 \tau_2} (D_1 D_2 + k \theta^2)}}{2(D_1 D_2 + k \theta^2)}, \quad y_2^* = \frac{(b_2 - b_2 e^{-d_2 \tau_2}) y_1^* + F - F e^{-d_2 \tau_2}}{d_2}.$$

作变换 $u_1(t) = x_1(t), u_2(t) = x_2(t), v_1(t) = y_1(t) - y_1^0, v_2(t) = y_2(t) - y_2^0$, 则系统(3)等价于关于 $(u_1(t), u_2(t), v_1(t), v_2(t))$ 的系统(4)

$$\begin{cases} u_1(t) = b_1 e^{-d_1 \tau_1} u_1(t - \tau_1) - D_1 u_1^2(t) + k \theta y_1^0 u_1(t) - E u_1(t) + k \theta u_1(t) v_1(t), \\ u_2(t) = b_1 u_1(t) - d_1 u_2(t) - b_1 e^{-d_1 \tau_1} u_1(t - \tau_1), \\ \dot{v}_1(t) = b_2 e^{-d_2 \tau_2} v_1(t - \tau_2) - D_2 v_1^2(t) - 2D_2 y_1^0 v_1(t) - \theta u_1(t) v_1(t) - \theta y_1^0 u_1(t), \\ \dot{v}_2(t) = b_2 v_1(t) - d_2 v_2(t) - b_2 e^{-d_2 \tau_2} v_1(t - \tau_2), \end{cases} \quad (t \geq 0), \quad (4)$$

于是考虑系统 (3) 的非负平衡点 E_0 的性态，只需考虑系统 (4) 零解的性态。而系统 (4) 的线性近似系统关于其零解的特征方程

$$(\lambda + d_1)(\lambda + d_2)(\lambda - k\theta y_1^0 + E - b_1 e^{-(d_1+\lambda)\tau_1})(\lambda + 2D_2 y_1^0 - b_2 e^{-(d_2+\lambda)\tau_2}) = 0$$

有负实根 $\lambda = -d_1$ 和 $\lambda = -d_2$ ，其它根分别由方程 $\lambda - k\theta y_1^0 + E - b_1 e^{-(d_1+\lambda)\tau_1} = 0$ 和 $\lambda + 2D_2 y_1^0 - b_2 e^{-(d_2+\lambda)\tau_2} = 0$ 来确定。

令 $f_1(\lambda) = \lambda + 2D_2 y_1^0 - b_2 e^{-(d_2+\lambda)\tau_2}$ ，则

$$f_1'(\lambda) = 1 + b_2 e^{-(d_2+\lambda)\tau_2} > 0, f_1(0) = 2D_2 y_1^0 - b_2 e^{-d_2\tau_2} > 0, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f_1(\lambda) = +\infty$$

所以 $f_1(\lambda)$ 只有负实部的根。令 $f_2(\lambda) = \lambda - k\theta y_1^0 + E - b_1 e^{-(d_1+\lambda)\tau_1}$ ，则

$$f_2'(\lambda) = 1 + b_1 e^{-(d_1+\lambda)\tau_1} > 0, f_2(0) = -k\theta y_1^0 + E - b_1 e^{-d_1\tau_1}, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f_2(\lambda) = +\infty$$

故当 $E < k\theta y_1^0 + b_1 e^{-d_1\tau_1}$ 时, $f_2(0) < 0$, 这时 $f_2(\lambda)$ 存在正实部的根, 系统 (4) 零解是不稳定的。当 $E > k\theta y_1^0 + b_1 e^{-d_1\tau_1}$ 时, $f_2(0) > 0$, $f_2(\lambda)$ 只有负实部的根, 系统 (4) 零解局部渐近稳定。于是可以得到如下的 2 个命题。

命题 1 在条件 $E > k\theta y_1^0 + b_1 e^{-d_1\tau_1}$ 下, E_0 是局部渐近稳定的。

命题 2 在条件 $E < k\theta y_1^0 + b_1 e^{-d_1\tau_1}$ 下, E_0 是不稳定的。

作变换 $u_1(t) = x_1(t) - x_1^*, u_2(t) = x_2(t) - x_2^*, v_1(t) = y_1(t) - y_1^*, v_2(t) = y_2(t) - y_2^*$, 则系统 (3) 等价于关于 $(u_1(t), u_2(t), v_1(t), v_2(t))$ 的系统 (5)

$$\begin{cases} u_1(t) = b_1 e^{-d_1\tau_1} u_1(t - \tau_1) - D_1 u_1^2(t) + (k\theta y_1^* - 2D_1 x_1^* - E) u_1(t) + k\theta x_1^* v_1(t) + k\theta u_1(t) v_1(t), \\ u_2(t) = b_1 u_1(t) - d_1 u_2(t) - b_1 e^{-d_1\tau_1} u_1(t - \tau_1), \\ v_1(t) = b_2 e^{-d_2\tau_2} v_1(t - \tau_2) - D_2 v_1^2(t) - (2D_2 y_1^* + \theta x_1^*) v_1(t) - \theta y_1^* u_1(t) - \theta u_1(t) v_1(t), \\ v_2(t) = b_2 v_1(t) - d_2 v_2(t) - b_2 e^{-d_2\tau_2} v_1(t - \tau_2), (t \geq 0) \end{cases} \quad (5)$$

考虑系统 (3) 的正平衡点 E^* 的稳定性态，只需考虑系统 (5) 零解的稳定性态。系统 (5) 的线性近似系统关于其零解的特征方程

$$(\lambda + d_1)(\lambda + d_2)[(\lambda + 2D_1 x_1^* - k\theta y_1^* + E - b_1 e^{-(d_1+\lambda)\tau_1})(\lambda + 2D_2 y_1^* + \theta x_1^* - b_2 e^{-(d_2+\lambda)\tau_2}) + k\theta^2 x_1^* y_1^*] = 0$$

有负实根 $\lambda_1 = -d_1$ 和 $\lambda_2 = -d_2$ 。令

$$G(\lambda) = (\lambda + 2D_1 x_1^* - k\theta y_1^* + E - b_1 e^{-(d_1+\lambda)\tau_1})(\lambda + 2D_2 y_1^* + \theta x_1^* - b_2 e^{-(d_2+\lambda)\tau_2}) + k\theta^2 x_1^* y_1^*$$

则其它的根由方程 $G(\lambda) = 0$ 的解来确定。令 $\lambda = \xi + i\eta$ (ξ, η 为实数)，则

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= (\xi + i\eta + 2D_1 x_1^* - k\theta y_1^* + E - b_1 e^{-(d_1+\xi+i\eta)\tau_1})(\xi + i\eta + 2D_2 y_1^* + \theta x_1^* - b_2 e^{-(d_2+\xi+i\eta)\tau_2}) + k\theta^2 x_1^* y_1^* = \\ &= (\xi + i\eta + 2D_1 x_1^* - k\theta y_1^* + E - b_1 e^{-(d_1+\xi+i\eta)\tau_1})(\xi + i\eta + D_2 y_1^* + \frac{F e^{-d_2\tau_2}}{y_1^*} + \\ &\quad b_2 e^{-d_2\tau_2} - b_2 e^{-(d_2+\xi+i\eta)\tau_2}) + k\theta^2 x_1^* y_1^* = \\ &= (B_1 + iA_1)(B_2 + iA_2) + k\theta^2 x_1^* y_1^* = 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \eta + b_1 e^{-d_1\tau_1 - \xi\tau_1} \sin(\eta\tau_1), A_2 = \eta + b_2 e^{-d_2\tau_2 - \xi\tau_2} \sin(\eta\tau_2), \\ B_1 &= \xi + D_1 x_1^* + b_1 e^{-d_1\tau_1} - b_1 e^{-d_1\tau_1 - \xi\tau_1} \cos(\eta\tau_1), \\ B_2 &= \xi + D_2 y_1^* + \frac{F e^{-d_2\tau_2}}{y_1^*} + b_2 e^{-d_2\tau_2} - b_2 e^{-d_2\tau_2 - \xi\tau_2} \cos(\eta\tau_2) \end{aligned}$$

以及 $-A_1 A_2 + B_1 B_2 + k\theta^2 x_1^* y_1^* = 0, A_1 B_2 + A_2 B_1 = 0$

所以 $(k\theta^2 x_1^* y_1^*)^2 = (A_1 A_2 - B_1 B_2)^2 = (A_1 A_2)^2 + (B_1 B_2)^2 - 2A_1 A_2 B_1 B_2$

因为 $A_1 B_2 = -A_2 B_1$, 所以 $-A_1 A_2 B_1 B_2 = (A_2 B_1)^2 = (A_1 B_2)^2$, 从而有

$$(A_1 A_2)^2 + (B_1 B_2)^2 + (A_2 B_1)^2 + (A_1 B_2)^2 = (k\theta^2 x_1^* y_1^*)^2$$

即 $(B_1 B_2)^2 \leq (k\theta^2 x_1^* y_1^*)^2$

若 $\xi \geq 0$, 则

$$B_1 \geq D_1 x_1^* + b_1 e^{-d_1\tau_1} - b_1 e^{-d_1\tau_1 - \xi\tau_1} \cos(\eta\tau_1) \geq D_1 x_1^* > 0,$$

$$B_2 \geq D_2 y_1^* + \frac{F e^{-d_2 \tau_2}}{y_1^*} + b_2 e^{-d_2 \tau_2} - b_2 e^{-d_2 \tau_2 - \xi \tau_2} \cos(\eta \tau_2) > D_2 y_1^* > 0,$$

所以 $B_1 B_2 > D_1 D_2 x_1^* y_1^* > 0$. 从而

$$(B_1 B_2)^2 > (D_1 D_2 x_1^* y_1^*)^2 = \left[(b_1 e^{-d_1 \tau_1} + k \theta y_1^* - E) \left(b_2 e^{-d_2 \tau_2} - \theta x_1^* + \frac{F e^{-d_2 \tau_2}}{y_1^*} \right) \right]^2 =$$

$$(k \theta x_1^* y_1^*)^2 + (D_1 D_2 + k \theta^2) x_1^* y_1^* (D_1 D_2 - k \theta^2) x_1^* y_1^* = (k \theta x_1^* y_1^*)^2 + [(D_1 D_2)^2 - (k \theta^2)^2] (x_1^* y_1^*)^2$$

当 $D_1 D_2 \geq k \theta^2$ 时, $(B_1 B_2)^2 > (k \theta^2 x_1^* y_1^*)^2$, 矛盾. 所以 $\xi < 0$, 故 $G(\lambda) = 0$ 仅有负实部的根, 系统 (5) 的零解在条件 $D_1 D_2 \geq k \theta^2$ 下是局部渐近稳定的. 于是得到下面的命题.

命题 3 在条件 $b_1 e^{-d_1 \tau_1} + k \theta y_1^* > E$ 及 $D_1 D_2 \geq k \theta^2$ 下, 正平衡点 E^* 局部渐近稳定的.

下面给出关于系统 (3) 的主要结果.

定理 1 在条件 $b_1 e^{-d_1 \tau_1} + k \theta y_1^* > E$ 及 $D_1 D_2 > k \theta^2$ 下, E^* 全局渐近稳定.

证明 由命题 3 知在定理条件下, E^* 是局部渐近稳定的. 故只需证系统 (5) 零解的全局吸引力. 由系统 (5) 的第 1 个方程, 可得

$$\dot{u}_1(t) > b_1 e^{-d_1 \tau_1} u_1(t - \tau_1) - D_1 u_1^2(t) + (k \theta y_1^* - 2D_1 x_1^*) u_1(t) - E u_1(t)$$

令 $x_{1,\epsilon}(t)$ 为方程 $\dot{x}(t) = b_1 e^{-d_1 \tau_1} x(t - \tau_1) - D_1 x^2(t) + (k \theta y_1^* - 2D_1 x_1^*) x(t) - E x(t)$ 满足初始条件 $x(t) = u_1(t) (-\tau_1 \leq t \leq 0)$ 的解, 因为 $2D_1 x_1^* + E > b_1 e^{-d_1 \tau_1} + k \theta y_1^*$, 所以由引理 2 知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{1,\epsilon}(t) = 0$, 即对 $\forall \epsilon$, $\exists S_1 \geq \tau_1$, 当 $t \geq S_1$ 时, $-\epsilon < x_{1,\epsilon}(t) < +\epsilon$. 而由比较原理知, 对 $t \geq S_1$, $-\epsilon < u_1(t)$.

由系统 (5) 的第 3 个方程及 ϵ 的任意性, 可得

$$\dot{v}_1(t) < b_2 e^{-d_2 \tau_2} v_1(t - \tau_2) - D_2 v_1^2(t) - (2D_2 y_1^* + \theta x_1^* - \theta \epsilon) v_1(t)$$

令 $y_{1,\epsilon}(t)$ 为方程 $\dot{y}(t) = b_2 e^{-d_2 \tau_2} y(t - \tau_2) - D_2 y^2(t) - (2D_2 y_1^* + \theta x_1^* - \theta \epsilon) y(t)$ 满足初始条件 $y(t) = v_1(t) (-\tau_2 \leq t \leq 0)$ 的解, 因为 $2D_2 y_1^* + \theta x_1^* > b_2 e^{-d_2 \tau_2}$, 所以由引理 2 知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{1,\epsilon}(t) = 0$, 即对 $\forall \epsilon$, $\exists S_2 \geq S_1$, 当 $t \geq S_2$ 时, $-\epsilon < y_{1,\epsilon}(t) < +\epsilon$. 而由比较原理知, 对 $t \geq S_2$, $v_1(t) < +\epsilon$.

由系统 (5) 的第 1 个方程, 可得

$$\dot{u}_1(t) < b_1 e^{-d_1 \tau_1} u_1(t - \tau_1) - D_1 u_1^2(t) + (k \theta y_1^* - 2D_1 x_1^* - E) u_1(t) + k \theta \epsilon u_1(t)$$

令 $x_1^\epsilon(t)$ 为方程 $\dot{x}(t) = b_1 e^{-d_1 \tau_1} x(t - \tau_1) - D_1 x^2(t) + (k \theta y_1^* - 2D_1 x_1^* - E) x(t) + k \theta \epsilon x(t)$ 满足初始条件 $x(t) = u_1(t) (-\tau_1 \leq t \leq 0)$ 的解, 因为 $2D_1 x_1^* + E > k \theta y_1^* + b_1 e^{-d_1 \tau_1}$, 所以由引理 2 知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1^\epsilon(t) = 0$, 即对 $\forall \epsilon$, $\exists S_3 \geq S_2$, 当 $t \geq S_3$ 时, $-\epsilon < x_1^\epsilon(t) < +\epsilon$. 而由比较原理知, 对 $t \geq S_3$, $u_1(t) < +\epsilon$. 从而对 $\forall \epsilon$, $\exists S_3 \geq \tau_1$, 当 $t \geq S_3$ 时, 有 $-\epsilon < u_1(t) < +\epsilon$, 由极限定义有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_1(t) = 0$.

从而

$$\dot{v}_1(t) > b_2 e^{-d_2 \tau_2} v_1(t - \tau_2) - D_2 v_1^2(t) - (2D_2 y_1^* + \theta x_1^* + \theta \epsilon) v_1(t)$$

令 $y_{1,\epsilon}(t)$ 为方程 $\dot{y}(t) = b_2 e^{-d_2 \tau_2} y(t - \tau_2) - D_2 y^2(t) - (2D_2 y_1^* + \theta x_1^* + \theta \epsilon) y(t)$ 满足初始条件 $y(t) = v_1(t) (-\tau_2 \leq t \leq 0)$ 的解, 因为 $2D_2 y_1^* + \theta x_1^* > b_2 e^{-d_2 \tau_2}$, 所以由引理 2 知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{1,\epsilon}(t) = 0$, 即对 $\forall \epsilon$, $\exists S_4 \geq S_3$, 当 $t \geq S_4$ 时, $-\epsilon < y_{1,\epsilon}(t) < +\epsilon$. 而由比较原理知, 对 $t \geq S_4$, $-\epsilon < v_1(t)$, 从而对 $\forall \epsilon$, $\exists S_4 > 0$, 当 $t \geq S_4$ 时, 有 $-\epsilon < v_1(t) < +\epsilon$. 由极限定义可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_1(t) = 0$.

下面证明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_2(t) = 0$.

对第 2 个方程从 T 到 t 积分, 可得

$$u_2(t) = u_2(T) e^{-d_1(t-T)} + e^{-d_1 t} \int_T^t e^{d_1 s} b_1 u_1(s) ds - e^{-d_1 t} b_1 e^{-d_1 \tau_1} \int_T^t e^{d_1 s} u_1(s - \tau_1) ds,$$

$$|u_2(t)| \leq |u_2(T)| e^{-d_1(t-T)} + e^{-d_1 t} \int_T^t [b_1 u_1(s) - b_1 e^{-d_1 \tau_1} u_1(s - \tau_1)] ds$$

利用事实, 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(s) = f_0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_T^t e^{-d_1(t-s)} f(s) ds = f_0 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_T^t e^{-d_1(t-s)} ds = \frac{f_0}{d_1}$$

于是可得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_2(t)| = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_2(t) = 0$.

同理可证 $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_2(t) = 0$.

所以系统 (5) 的零解全局吸引。故 E^* 是全局渐近稳定的。证毕。

定理 2 在条件 $b_1 e^{-d_1 \tau_1} + k \theta y_1^0 < E$ 下, E_0 是全局渐近稳定的。

类似于定理 1 的证明, 在命题 1 的条件下可证定理 2。

3 举 例

考虑模型

$$\dot{x}_1(t) = 0.1426x_1(t-3) - 0.35x_1^2(t) + 0.3066x_1(t)y_1(t) - 0.8x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.55x_1(t) - 0.45x_2(t) - 0.1426x_1(t-3),$$

$$\dot{y}_1(t) = 0.179y_1(t-2.5) - 0.42y_1^2(t) - 0.42x_1(t)y_1(t) + 0.1264,$$

$$\dot{y}_2(t) = 0.71y_1(t) - 0.55y_2(t) - 0.179y_1(t-2.5) + 0.3736, (t \geq 0),$$

$$(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) > 0, (-\tau_i \leq t \leq 0, i = 1, 2)$$

其中, $b_1 = 0.55, b_2 = 0.71, d_1 = 0.45, d_2 = 0.55, D_1 = 0.35, D_2 = 0.42, \theta = 0.42, k = 0.73, \tau_1 = 3, \tau_2 = 2.5, E = 0.8, F = 0.5$ 。容易验证定理 1 的条件成立, 故该系统的惟一正平衡点 $(0.4434, 0.4015, 2.6504, 2.4646)$ 是全局渐近稳定的。因此本文对考虑的模型所得到的结论是可以实现的。

参考文献:

- [1] 陈兰荪. 数学生态学建模与研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [2] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.
- [3] AIELLO W G, FREEDMAN H I. A time-delay model of single-species growth with stage-structure[J]. Math Biosci, 1990, 101: 139—153.
- [4] SONG X, CHEN L. A predator-prey system with stage structure and harvesting for predator[J]. Ann Diff Eqs, 2002, 18(3): 264—277.
- [5] SALADANA J, CALSINA A. Global dynamics and optimal life history of a structured population model[J]. SIAM J Appl Math, 1999, 59: 1667—1685.
- [6] OU L, LUO G, JIANG Y, et al. The asymptotic behaviors of a stage-structured autonomous predator-prey system with time-delay[J]. J Math Analysis and Appl, 2003, 283: 534—548.
- [7] LIU S, CHEN L, LUO G, et al. Asymptotic behavior of competitive Lotka-Volterra system with stage structure[J]. J Math Anal Appl, 2002, 271: 124—138.

Global Asymptotic Behaviors of an Exploited Predator-prey System with Stage-structure

OU Liu-man, LI Yi-ping

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: An exploited predator-prey system is considered in which individuals may belong to one of two classes: the immature and the mature. By using eigenvalue analysis and iterative algorithm, some simple conditions for global asymptotic stability of the unique positive equilibrium are obtained. What is more, the optimal harvesting problem is further analysed. An example illustrates these results.

Key words: predator-prey; exploiting; stage-structure; globally asymptotically stable