

一类数字半群的极小表示^{*}

朱用文

(烟台大学数学与信息科学系, 山东 烟台 264005)

摘要: 应用 J. C. Rosales 的有关理论研究数字半群 $S = \langle m, m+2, m+3, m+4, \dots, 2m-2, 2m-1 \rangle$, 其中 $m \geq 5$, 该类数字半群的 Ap_p 集不具有惟一分解性质。本文完全确定了该类数字半群的极小表示。

关键词: 数字半群; 极小表示; Ap_p 集

中图分类号: O152.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 06-0169-03

1 主要引理

Rosales 在数字半群方面作了大量的工作, 见文献 [1-3]。在文 [1] 中, 他给出了数字半群的极小表示的无穷并表达式。为了便于计算, 在文 [2] 中, 他进一步给出了相应的有限表达式, 但是这只对于 Ap_p 集具有惟一分解性质的数字半群有效。本文中所讨论的一类数字半群, 如下面的例 1 就不满足这个性质。

所谓数字半群, 就是能够生成整个整数加法群 $\mathbb{Z}$ 的、非负整数 $\mathbb{N}$ 的子群。

例 1 设 $S = \{0, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, \dots\}$, 按照通常的加法, 这就是一个数字半群。

可以找出数字半群的极小生成元集, 比如, 对于例 1 来说就是 $\{5, 7, 8, 9\}$, 从小到大排列这些生成元, 并且可以记 $S = \langle 5, 7, 8, 9 \rangle$ 。对于一般的数字半群 S , 我们可以写

$$S = \langle n_0, n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$$

其中, $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p$ 就是极小生成元集的全部元素。此时, 称 n_0 为 S 的重数, 称 $e = p+1$ 为 S 的嵌入维数。本文研究数字半群 $S = \langle m, m+2, m+3, m+4, \dots, 2m-2, 2m-1 \rangle$, 其中 $m \geq 5$ 。本文通过发展 Rosales 的理论, 完全确定了这一类数字半群的极小表示, 主要的结果是定理 1。

对于数字半群 S 中的任意非零数 n , 定义 Ap_p 集如下:

$$\text{Ap}_p(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$$

在应用中, 通常对重数来求 Ap_p 集。对于上面的例 1, 重数 $n_0 = 5$, 嵌入维数 $e = 4$, $\text{Ap}_p(S, n_0) = \{5, 7, 8, 9, 16\}$ 。我们看到, 例子中的 $\text{Ap}_p(S, n_0)$ 恰好

由模 n_0 的全部剩余类组成, 一般情况也是如此。

设 $n \in \text{Ap}_p(S, n_0) - \{0\}$ 。如果存在 $i \geq 1$ 以及 $a_i \in \mathbb{N}$ 使得 $n = a_i n_i$ 成立, 则称该等式是 n 的一个一元分解。同样地, 称 $n = a_i n_i + a_j n_j$ 是 n 的一个二元分解, 其中 $1 \leq i < j \leq p$, 并且 $a_i, a_j \in \mathbb{N} - \{0\}$ 。如果 $\text{Ap}_p(S, n_0) - \{0\}$ 中的所有非零数的分解都只有一元分解, 那么称 $\text{Ap}_p(S, n_0)$ 具有一元分解性质。如果 $\text{Ap}_p(S, n_0) - \{0\}$ 中的所有非零数的所有分解都只有一元或者二元分解, 那么称 $\text{Ap}_p(S, n_0)$ 具有至多二元分解性质。可以类似地定义三元分解, 以及至多三元分解性质, 等等。

对于例 1 来说, $\text{Ap}_p(S, n_0)$ 具有至多二元分解性质。但是, 由于 $16 = n_1 + n_3 = 2n_2$, 故 $\text{Ap}_p(S, n_0)$ 不具有惟一分解性质。

设 F 是 $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_p\}$ 上的自由交换群, 即 $F = \{a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p \mid a_0, a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{N}\}$, 定义一个映射 $\varphi: F \rightarrow S$ 为

$$\begin{aligned} \varphi(a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p) = \\ a_0 n_0 + a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_p n_p, \end{aligned}$$

则 φ 是一个群的满同态。它的核同余用 σ 表示。而 σ 的一个极小生成元集就称为半群 S 的一个极小表示。

将 $\varphi^{-1}(n)$ 记为 $E(n)$, 其中 $n \in S - \{0\}$ 。定义 $E(n)$ 上的一个等价关系 R 如下:

$$\begin{aligned} (a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p) R \\ (b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_p X_p) \end{aligned}$$

当且仅当存在

$$\begin{aligned} k_{00} X_0 + k_{01} X_1 + k_{02} X_2 + \dots + k_{0p} X_p, \\ k_{10} X_0 + k_{11} X_1 + k_{12} X_2 + \dots + k_{1p} X_p, \end{aligned}$$

* 收稿日期: 2003-12-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10071066)

作者简介: 朱用文 (1965 年生), 男, 硕士, 副教授; E-mail: zyw@ytu.edu.cn

$$\vdots$$
$$k_{m0}X_0 + k_{m1}X_1 + k_{m2}X_2 + \cdots + k_{mp}X_p \in E(n)$$
使得

$$\begin{aligned} a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_pX_p &= \\ k_{00}X_0 + k_{01}X_1 + k_{02}X_2 + \cdots + k_{0p}X_p, \\ b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_pX_p &= \\ k_{m0}X_0 + k_{m1}X_1 + k_{m2}X_2 + \cdots + k_{mp}X_p \end{aligned}$$

并且
$$k_{i0}k_{i+10} + k_{i1}k_{i+11} + k_{i2}k_{i+12} + \cdots + k_{ip}k_{i+1p} \neq 0$$
对于每一个 $i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ 成立。

任给 $n \in S - \{0\}$, 定义 γ_n 如下:

- (1) $\gamma_n = \emptyset$ 如果 $|E(n)/R| = 1$;
- (2) 如果 $E(n)/R = \{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$, $r \geq 2$, 那么, $\forall i \in \{2, \cdots, r\}$, 选取 $x_i \in A_i$, 以及 $y_2, \cdots, y_r \in A_1$, 令 $\gamma_n = \{(x_2, y_2), \cdots, (x_r, y_r)\}$.

令 $\gamma = \bigcup_{n \in S - \{0\}} \gamma_n$, 根据文[1], 有

引理 1 γ 是 S 的一个极小表示。

设 $T = \{(a_1, a_2, \cdots, a_p) \in \mathbb{N}^p \mid a_1n_1 + a_2n_2 + \cdots + a_pn_p \notin A_p(S, n_0)\}$, 并令 $\min(T)$ 是 T 在 $\mathbb{N}^p$ 的自然偏序下的极小元。如果 $\min(T) = \{a_1 = (a_{11}, \cdots, a_{1p}), \cdots, a_t = (a_{t1}, \cdots, a_{tp})\}$ 。对于任意的 $i \in \{1, \cdots, t\}$, 令 $x_i = 0X_0 + a_{i1}X_1 + \cdots + a_{ip}X_p \in F$ 。因为

$$\varphi(x_i) \notin A_p(S, n_0), \exists (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \cdots, \beta_{ip}) \in \mathbb{N}^{p+1}$$

其中, $\beta_{i0} \neq 0$

使得
$$\varphi(x_i) = \beta_{i0}n_0 + \beta_{i1}n_1 + \beta_{i2}n_2 + \cdots + \beta_{ip}n_p$$
令 $y_i = \beta_{i0}X_0 + \beta_{i1}X_1 + \beta_{i2}X_2 + \cdots + \beta_{ip}X_p \in F$ 令 $\rho = \{(x_1, y_1), \cdots, (x_t, y_t)\}$

将 Rosales 在文 [3] 中的主要结果叙述为下面的引理 2。

引理 2 如果 S 是一个数字半群并且 $A_p(S, n_0)$ 具有惟一分解性质, 那么 ρ 是 S 一个极小表示。

为了方便, 介绍如下一些记号和术语。

设 $S = \langle n_0, n_1, \cdots, n_p \rangle$ 是一个数字半群。对于任意的 $k = 1, 2, \cdots, p$, 令
$$C_{k-1} = \{(i_1 \cdots i_k) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p \text{ 且 } (n_{i_1} + \cdots + n_{i_k}) - n_j \in A_p(S, n_0), \forall j = 1, \cdots, k\}$$

$$\Delta_k = \{(i_1 \cdots i_k) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p \text{ 且}$$

$$\exists x_{i_1}n_{i_1} + \cdots + x_{i_k}n_{i_k} \in A_p(S, n_0)$$

$$\text{其中, } x_{i_1} \cdots x_{i_k} \neq 0\}$$

$$\Omega = \{n \in A_p(S, n_0) - \{0\} : |E(n)/R| \geq 2\}$$

如果

$$a = \varphi^{*-1}(x_{i_1}n_{i_1} + \cdots + x_{i_k}n_{i_k}) \in \min(T)$$

其中 $x_{i_1} \cdots x_{i_k} \neq 0$

那么说 a 是 T 的一个 k -型极小元。

如果

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_p), (b_1, b_2, \cdots, b_p) \in \mathbb{N}^p$$

使得 $a \leq b$, 并且

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p) + 1 = (b_1 + b_2 + \cdots + b_p)$$

这里的 $\leq$ 是 $\mathbb{N}^p$ 中的自然偏序, 那么称 b 覆盖 a , 记为 $a < b$ 。令

$$\lambda(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_p) =$$

$$a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_pX_p,$$

$$\tau(a_1, a_2, \cdots, a_p) = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_p)$$

其中, $a_0 = 0$, 则 λ 是一个半群同构, τ 是一个半群单同态。令 $\varphi^* = \varphi\lambda\tau$, 则 φ^* 是从 $\mathbb{N}^p$ 到 S 的一个半群同态。

引理 3 设 $b \in \min(T)$, $n = \varphi^*(b)$ 。那么 $\{\lambda\tau(b)\}$ 是 $E(n)$ 的一个 R -类的充分必要条件是对于 $\forall a < b$, $\varphi^*(a)$ 有惟一分解性质。

证明 直接验证即可。证毕。

引理 4 假设 S 是一个数字半群, 并且对于 $\forall b \in \min(T)$, $\forall a < b$, $\varphi^*(a)$ 有惟一分解性质。如果 $|E(n)/R| = 1$ 对任意的 $n \in A_p(S, n_0) - \{0\}$ 成立, 那么 ρ 是 S 的一个极小表示。

证明 模仿文 [3] 中定理 1 的证明过程即可。证毕。

引理 5 假设 S 是一个数字半群, 并且对于 $\forall b \in \min(T)$, $a < b$, $\varphi^*(a)$ 都有惟一分解性质, 那么 $\rho \cup (\bigcup_{n \in \Omega} \gamma_n)$ 是 S 的一个极小表示。

证明 类似于引理 4 的证明, 可以得到 $\rho_n = \gamma_n$ 成立, 如果 $|E(n)/R| = 1$, 或者 $|E(n)/R| \geq 2$ 并且 $n \notin A_p(S, n_0)$ 。 $n \in A_p(S, n_0) - \{0\}$ 并且 $|E(n)/R| = r \geq 2$, 那么 $\rho_n = \emptyset$ 。根据引理 1 和引理 2, 可以计算 S 的极小表示 γ 如下:

$$\begin{aligned} \gamma &= \bigcup_{n \in S - \{0\}} \gamma_n = \left(\bigcup_{n \in \Omega} \gamma_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in S - \{0\} - \Omega} \gamma_n \right) = \\ &\quad \left(\bigcup_{n \in \Omega} \gamma_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in S - \{0\} - \Omega} \rho^n \right) = \\ &\quad \left(\bigcup_{n \in \Omega} \gamma_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \Omega} \rho_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in S - \{0\} - \Omega} \rho_n \right) = \\ &\quad \left(\bigcup_{n \in \Omega} \gamma_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in S - \{0\}} \rho_n \right) = \left(\bigcup_{n \in \Omega} \gamma_n \right) \cup \rho \end{aligned}$$

故引理结论成立。证毕。

2 结果及其证明

现在可以叙述并且证明本文的主要定理。

定理 1 设数字半群

$$S = \langle m, m+2, m+3, m+4, \cdots, 2m-2, 2m-1 \rangle$$

其中, $m \geq 5$, 则 S 的一个极小表示为 $\gamma = M_0 \cup$

$(\bigcup_{k=1}^{m-2} B_k)$, 其中

$$\begin{aligned} M_0 &= \{(X_1 + X_{m-2}, X_2 + X_{m-3}), \\ &\quad (X_1 + X_{m-2}, X_3 + X_{m-4}), \dots, \\ &\quad (X_1 + X_{m-2}, X_{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} + X_{m-1-\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor})\} \\ B_1 &= \{(2X_1, X_0 + X_3), (X_1 + X_2, X_0 + X_4), \\ &\quad (X_1 + X_3, X_0 + X_5), \dots, (X_1 + X_{m-4}, \\ &\quad X_0 + X_{m-2}), (X_1 + X_{m-3}, 3X_0)\} \\ B_2 &= \{(2X_2, X_0 + X_5), (X_2 + X_3, X_0 + X_6), \\ &\quad (X_2 + X_4, X_0 + X_7), \dots, (X_2 + X_{m-5}, X_0 + X_{m-2}), \\ &\quad (X_2 + X_{m-4}, 3X_0), (X_2 + X_{m-2}, 2X_0 + X_1)\} \\ &\quad \dots\dots\dots \\ B_{m-3} &= \{(2X_{m-3}, 2X_0 + X_{m-5}), \\ &\quad (X_{m-3} + X_{m-2}, 2X_0 + X_{m-4})\} \\ B_{m-2} &= \{(2X_{m-2}, 2X_0 + X_{m-3})\} \end{aligned}$$

当 m 为奇数时, 上述集合中的元素略微有些变化, 那就是其中的第 $(m+1)/2$ 个集合变为

$$\begin{aligned} B_{(m+1)/2} &= \{(3X_{(m-1)/2}, 3X_0 + X_{(m+1)/2}), \dots, \\ &\quad (2X_{(m-1)/2} + X_{m-2}, 5X_0)\} \end{aligned}$$

证明 仍然记 $S = \langle n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p \rangle$, 则

$$\begin{aligned} p &= m-2, \quad e = p+1 = m-1, \\ Ap(S, n_0) &= \{n_0, n_1, n_2, \dots, n_p, n_1 + n_p = \\ &\quad n_2 + n_{p-1} = \dots\} \\ \Delta_2 &= \{(1, p), (2, p-1), (3, p-2), \dots\} \end{aligned}$$

对于任意的 $k \geq 3$, $\Delta_k = \emptyset$, 而对于任意的 $k \geq 2$, $C_k = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{n_1 + n_p\} = \{3m\}, \\ E(3m) &= \{\{X_1 + X_p\}, \{X_2 + X_{p-1}\}, \dots, \\ &\quad \{X_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} + X_{p+1-\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}\}\} \end{aligned}$$

这里 $\lfloor * \rfloor$ 表示对于 $*$ 取整. 下面分几个步骤来完成定理的证明.

- (1) 将 Ω 所对应的 γ 中的元的集合记为 M_0 .
根据引理 1 可计算出 M_0 .
- (2) 将 1-型和 2-型极小元所对应的 γ 中的元

的集合记为 M_{12} .

$\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 由于 $n_i \in A_p(S, n_0)$, 存在最大的正整数 k_i 使得 $kn_i \in A_p(S, n_0)$ 对于 $\forall k \leq k_i$ 成立. 因此 $\varphi^{*-1}((k_i+1)n_i) \in \min(T)$. 任给 i, j 使得 $1 \leq i < j \leq p$, 如果 $(i, j) \notin \Delta_2$, 那么 $\psi^{*-1}(n_i + n_j) \in \min(T)$; 如果 $(i, j) \in \Delta_2$, 那么从 $Ap(S, n_0)$ 中的元素可以看出来, 此时 T 中没有相应的、形如 $\Phi^{*-1}(n_i + n_j)$ 的极小元. 于是全体 1-型和 2-型极小元构成的集合为 $\bigcup_{k=1}^{m-2} A_k$. 于是我们有 $M_{12} = \bigcup_{k=1}^{m-2} B_k$.

(3) 当 $k \geq 3$ 时 k -型极小元不存在, 故与此相应的 γ 中的元的集合为空集.

(4) 对于 Δ_2 中元素 $(1, p)$, 对应的 $Ap(S, n_0)$ 中的分解为 $n_1 + n_p$, 由此可以验证 T 中极小元所覆盖的元所对应的半群元素在 $Ap(S, n_0)$ 中分解惟一. 根据引理 5, 可以计算如下:

$$\begin{aligned} \gamma &= \rho \cup \left(\bigcup_{n \in \Omega} \gamma_n \right) = M_0 \cup M_{12} = \\ &\quad M_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m-2} B_k \right) \end{aligned}$$

证毕.

例如, 对于上一节提到的例 1 中的半群 S , 它的一个极小表示为

$$\begin{aligned} \gamma &= \{(X_1 + X_3, 2X_2), (2X_1, X_0 + X_3), \\ &\quad (X_1 + X_2, 3X_0), (3X_2, 2X_0 + 2X_1), \\ &\quad (2X_2 + X_3, 5X_0), (2X_3, 2X_0 + X_2)\} \end{aligned}$$

从上述研究出发, 可以得到更为一般的理论. 有关的问题将另外撰文加以阐述.

参考文献:

[1] ROSALES J C. An algorithmic method to compute a minimal relation for any numerical semigroup[J] . Internat J Algebra Comput, 1996(6) : 441—455.

[2] ROSALES J C. On numerical semigroups[J] . Semigroup Forum, 1996, 52: 307—318.

[3] ROSALES J C. Numerical semigroups with Apéry sets of unique expression[J] . J Algebra, 2000, 226: 479—487.

Minimal Presentations of a Class of Numerical Semigroups

ZHU Yong wen

(Department of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Yantai 264005, Shandong, China)

Abstract: Some relative theorems of J. C. Rosales about numerical semigroups are applied to study the numerical semigroups $S = \langle m, m+2, m+3, m+4, \dots, 2m-2, 2m-1 \rangle$ for $m \geq 5$, whose Apéry sets have not unique expression property. The minimal presentations of this kind of numerical semigroups are completely determined.

Key words: numerical semigroup; minimal presentation; Apéry set