

# 输入和服务均与系统状态相依的排队模型 ——其队长的瞬时分布

何宁卡, 俞政, 胡达轩

(中南大学数学科学与计算技术学院, 湖南长沙 410075)

**摘要:** 探讨了一个有如下特征的排队系统: 系统的到达间隔序列  $\{\tau_m\}$  及服务过程  $\{v_n\}$  均为相互独立但不一定同分布的随机变量序列。每个  $\tau_m$  及每个  $v_n$  的分布均与系统的瞬时状态有关。易见, 此系统是经典的 GI/G/1 排队系统的拓广。利用补充变量技术, 可以得到一个多维马氏过程, 使得上述系统的瞬时队长过程为此多维过程的一个分量过程, 借助马氏过程理论, 系统的瞬时队长分布的积分表示被导出。在一定条件下, 该积分表示的被积项能够递归地求取。

**关键词:** 排队系统; 瞬时队长; 补充变量

**中图分类号:** O211.62 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 01-0021-04

排队论发展至今, 在得到深入研究的各类排队系统中, GI/G/1 系统是对到达和服务过程的限制最为宽松的一个经典排队模型。1955 年 Tabács 开始考虑 GI/G/1 排队系统, 他证明了 GI/G/1 系统的等待时间的平稳分布存在, 且满足一个积分方程。20 世纪 70 年代, 他又求得了 GI/G/1 系统的等待时间的瞬时分布, 稍后, 证明了该系统队长的平稳分布存在<sup>[1]</sup>。20 世纪末 Alfa 和 Rao 借助补充变量方法研究了 GI/G/1 排队系统, 得到了该系统瞬时队长分布的积分表示, 在此积分表示中, 被积项可由一组柯氏偏微分方程递归地确定。沿着 Alfa 和 Rao 的思路, 我们拓广 GI/G/1 系统为 SMAP (DQL) / SMAP (DQL) / 1 系统。同样应用补充变量方法考虑该系统的瞬时队长分布, 得到的结果与 Alfa 和 Rao 关于 GI/G/1 系统瞬时队长分布的结果相似。

## 1 定义与符号

称一个排队系统为 SMAP(DQL)/SMAP(DQL)/1 系统, 若该系统为如下所描述:

(1) 系统由单一服务台构成; 排队规则为“先到先服务”。

(2) 顾客相继到达间隔  $\tau_m = \alpha_m - \alpha_{m-1}$  的分布函数由其两端点处系统的队长  $L(\alpha_{m-1})$  和  $L(\alpha_m)$  确定,  $m = 1, 2, \dots$ ; 相继服务时间  $v_n$  的分布函数亦由  $v_n$  的两端点处的队长的值确定,  $n = 1, 2, \dots$ 。

(3)  $\{\tau_m\}, \{v_n\}$  均为独立随机变量序列, 且两者亦相互独立。

以下, 以  $F(m-1, m, t)$  和  $G(n-1, n, t)$  分别表示  $\tau_m$  和  $v_n$  的分布函数,  $m, n = 1, 2, \dots$ 。

由此定义可见: 当各  $\tau_m$  的分布相同, 且各  $v_n$  的分布相同时, 系统即退化为一个 GI/G/1 系统。

在这篇文章中, 以  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  表示基本概率空间, 文中涉及各随机变量均被认为是定义在该基本概率空间上的,  $N$  表示集合  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $R^+$  表示  $[0, \infty)$ ,  $B^1$  表示  $R^+$  上的 Borel  $\sigma$ -代数, 以  $L(t)$  表示系统在时刻  $t$  的队长,  $\delta_{ij}$  表示 Kronecker delta 函数,  $\delta(\cdot), \delta(\cdot, \cdot)$  和  $\delta(\cdot, \cdot, \cdot)$  表示 1 维, 2 维及 3 维 Dirac delta 函数。

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

为方便表述系统在初始时刻 0 之后第一个到达时刻或第一个离去时刻的分布, 引入下述的记号:

设  $X$  为一非负随机变量, 其分布函数为  $A(t)$ , 对  $t_0 \geq 0$ , 令

$$A_{t_0}(t) = \begin{cases} \frac{A(t+t_0) - A(t_0)}{1 - A(t_0)}, & \text{若 } A(t_0) < 1 \\ 1, & \text{若 } A(t_0) = 1 \end{cases}$$

即

$$A_{t_0}(t) = P\{X \leq t + t_0 \mid X > t_0\}$$

\* 收稿日期: 2003-06-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10171009); 高校博士点基金资助项目 (20010533001); “985 行动计划”和“211 工程”资助项目

作者简介: 何宁卡 (1959 年生), 男, 高级经济师, 在读博士; 通讯联系人: 胡达轩; E-mail: hudx@mail.csu.edu.cn

令  $\beta_n$  为初始时刻0之后第  $n$  个离开系统的顾客的离去时刻,  $n = 1, 2, \dots$ 。

以  $-t_0$  ( $t_0 > 0$ ) 表示至时刻0为止最后一个顾客的到达时刻,  $t^*$  ( $t^* \geq 0$ ) 表示时刻0正在接受服务的顾客(若此时有顾客接受服务)已消耗的服务时间。记  $\alpha_0 = -t_0, \beta_0 = -t^*$ ; 以  $L(\alpha_0), L(\beta_0)$  分别表示时刻  $\alpha_0$  和  $\beta_0$  系统的队长。记  $A = \{\alpha_m, \beta_n; m, n \in N\}$ , 而  $\{\gamma_k\}$  表示集合  $A$  中的元素依其发生次序排列而成的序列。显然, 当  $\beta_1 - v_1 \leq 0$  时,  $t^* = v_1 - \beta_1$ 。

## 2 多维马氏过程的构造

定义序列  $\{S_l\}$ :  $S_l = \beta_l - v_l$ , 若  $\beta_l - v_l > 0$ ;

$$S_{l+1} = \beta_{l+1} - v_{l+1}, \quad l = 1, 2, \dots$$

**引理 1** 对每一个  $l \geq 1, S_l \geq \beta_{l-1}$ , 并且  $S_l \in \{\gamma_k\}$ 。

**证明** 由  $S_l, \beta_{l-1}$  的定义及排队规则, 即可得此结论。

$\forall t \geq 0$ , 令

$$\theta_1(t) = \begin{cases} t + t_0, & \text{若 } 0 \leq t < \alpha_1 \\ t - \alpha_k, & \text{若 } \alpha_k \leq t < \alpha_{k+1}, k = 1, \dots \end{cases}$$

$$\theta_2(t) = \begin{cases} t + t^*, & 0 \leq t < \beta_1, \beta_1 \leq v_1 \\ t, & 0 \leq t < S_1, \beta_1 > v_1 \\ t - S_1, & S_1 \leq t < \beta_1, \beta_1 > v_1 \\ t - \beta_k, & \beta_k \leq t < S_{k+1}, k \geq 1 \\ t - S_{k+1}, & S_{k+1} \leq t < \beta_{k+1}, k \geq 1 \end{cases}$$

$$H_1(t) = L(\alpha_{n-1}),$$

若  $\alpha_{n-1} \leq t < \alpha_n, n = 1, 2, \dots$

$$H_2(t) = \begin{cases} L(\beta_0), & \text{若 } 0 \leq t < \beta_1, \beta_1 \leq v_1 \\ L(\beta_0), & \text{若 } 0 \leq t < S_1, \beta_1 > v_1 \\ L(S_1), & \text{若 } S_1 \leq t < \beta_1, \beta_1 > v_1 \\ L(\beta_k), & \text{若 } \beta_k \leq t < S_{k+1}, k \geq 1 \\ L(S_{k+1}), & \text{若 } S_{k+1} \leq t < \beta_{k+1}, k \geq 1 \end{cases}$$

$$X(t) = (L(t), \theta_1(t), \theta_2(t), H_1(t), H_2(t))$$

**引理 2**  $\{X(t), t \geq 0\}$  是  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的齐次马氏过程, 其状态空间为  $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ , 其中  $\mathcal{E} = N \times R^+ \times R^+ \times N \times N, \mathcal{B}$  是  $\mathcal{E}$  上的  $\sigma$  代数。

**证明** 只须证明马氏性即可(见[2])。设  $T$  是一个正实数,  $[0, T]$  上的过程  $X(t) = (L(t), \theta_1(t), \theta_2(t), H_1(t), H_2(t))$  的性态由诸量  $X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)$  (其中  $N$  是使  $\gamma_N \leq T < \gamma_{N+1}$  成立的自然数) 的值完全确定。

设  $\mathcal{F}_T$  是  $\Omega$  上, 由  $[0, T]$  上的过程  $X(t)$  的性态

确定的  $\sigma$ -代数。在集合  $\Omega_N = \{\omega: \gamma_N \leq T < \gamma_{N+1}\}$  上, 测度  $P\{X(t+T) \in D | \mathcal{F}_T\}$ ,  $D \in \mathcal{B}$  仅仅是  $X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)$  的函数。

若能证明在  $\Omega_N$  上, 成立

$$P\{L(t+T) \in B, \theta_i(t+T) \in \Lambda_i, H_i(t+T) \in C_i, i = 1, 2 | X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\} = P\{L(t+T) \in B, \theta_i(t+T) \in \Lambda_i, H_i(t+T) \in C_i, i = 1, 2 | X(T)\}$$

其中  $B \times \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times C_1 \times C_2 = D$

则  $\{X(t), t \geq 0\}$  的马氏性得以证实。应用条件概率性质易知, 这只须证明: 在  $\Omega_N$  上

$$P\{\gamma_{N+1} > t+T | X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\}$$

和

$$E\{P\{L(t+T-\gamma_{N+1}) \in B, \theta_i(t+T-\gamma_{N+1}) \in \Lambda_i, i = 1, 2, H_j(t+T-\gamma_{N+1}) \in C_j, j = 1, 2 | \gamma_{N+1}, X(\gamma_{N+1})\} | I_{|T < \gamma_{N+1} \leq t+T|} | X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\}$$

仅只依赖  $X(T)$  即可。

由  $X(t)$  的构造, 易知: 在  $\Omega_N$  上, 成立

$$\gamma_N = \begin{cases} T - \theta_1(T), & \gamma_N \in \{\alpha_m\} \\ T - \theta_2(T), & \gamma_N \in \{\beta_n\} \end{cases}$$

$$X(\gamma_N) = \begin{cases} (L(T), 0, \theta_2(T) - \theta_1(T), H_1(T), H_2(T)) & \gamma_N \in \{\alpha_m\} \\ (L(T), \theta_1(T) - \theta_2(T), 0, H_1(T), H_2(T)) & \gamma_N \in \{\beta_n\} \end{cases}$$

从而,  $(\gamma_N, X(\gamma_N))$  与  $X(T)$  相互确定。

(1) 关于

$$P\{\gamma_{N+1} > t+T | X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\}$$

①  $\gamma_{N+1} = \beta_m$

由引理 1,  $\exists S_m \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ , 使得  $S_m = \beta_m - v_m$ 。从而  $\gamma_{N+1} > t+T \Leftrightarrow v_m > t + \theta_2(T)$ 。于是,

$$P\{\gamma_{N+1} > t+T | X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\} = P\{v_m > t + \theta_2(T) | L(S_m), \gamma_N, X(\gamma_N)\}$$

从而, 在

$$\Omega_N = \{\gamma_N \leq T\} \cap \{T < \gamma_{N+1}\} = \{\gamma_N \leq T\} \cap \{v_m > \theta_2(T)\}$$

上, 有

$$P\{v_m > t + \theta_2(T) | L(S_m), \gamma_N, X(\gamma_N), T - \gamma_N \geq 0, v_m > \theta_2(T)\} = \frac{P\{v_m > t + \theta_2(T) | X(T)\}}{P\{v_m > \theta_2(T) | X(T)\}}$$

$$\textcircled{2} \gamma_{N+1} = \alpha_n$$

类似于 ① 中讨论, 可得结论。

故在  $\Omega_N$  上,

$$P\{\gamma_{N+1} > t + T \mid X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\}$$

确实只依赖  $X(T)$ 。

(2) 关于

$$\begin{aligned} E\{P\{L(t + T - \gamma_{N+1}) \in B, \\ \theta_i(t + T - \gamma_{N+1}) \in \Lambda_i, i = 1, 2; \\ H_j(t + T - \gamma_{N+1}) \in C_j, j = 1, 2; \\ \mid \gamma_{N+1}, X(\gamma_{N+1})\} \\ I_{\mid T < \gamma_{N+1} \leq t+T \mid} \mid X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \gamma_{N+1} = \beta_m$$

由引理 1 知:

$$\exists S_m \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$$

使得

$$S_m = \beta_m - v_m,$$

于是, 在  $\Omega_N$  上

$$\begin{aligned} \gamma_{N+1} = v_m + T - \theta_2(T)X(\gamma_{N+1}) = (L(T) - 1, \\ v_m + \theta_1(T) - \theta_2(T), 0, H_1(T), H_2(T) - 1) \end{aligned}$$

由此可知, 在给定  $S_m$  的条件下,

$$(\gamma_{N+1}, X(\gamma_{N+1})) \text{ 和 } (v_m, X(T))$$

相互确定, 这导致存在一个  $B^1 \times B$  可测函数  $h(s, x)$ , 使得

$$\begin{aligned} E\{P\{L(t + T - \gamma_{N+1}) \in B, \\ \theta_i(t + T - \gamma_{N+1}) \in \Lambda_i, i = 1, 2; \\ H_j(t + T - \gamma_{N+1}) \in C_j, j = 1, 2; \\ \mid \gamma_{N+1}, X(\gamma_{N+1})\} I_{\mid T < \gamma_{N+1} \leq t+T \mid} \mid \\ X(0), \gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\} = \\ E\{h(v_m, X(T)) I_{\mid \theta_2(T) < v_m \leq t+\theta_2(T) \mid} \mid \\ L(S_m), S_m, \gamma_N, X(\gamma_N)\} \end{aligned}$$

于是在

$$\Omega_N = \{\gamma_N \leq T\} \cap \{v_n > \theta_2(T)\}$$

上, 有  $E\{h(v_m, X(T)) I_{\mid \theta_2(T) < v_m \leq t+\theta_2(T) \mid} \mid$

$$L(S_m), S_m, \gamma_N, X(\gamma_N),$$

$$T - \gamma_N \geq 0, v_m > \theta_2(T)\} =$$

$$E\{h(v_m, X(T)) I_{\mid \theta_2(T) < v_m \leq t+\theta_2(T) \mid} \mid$$

$$X(T), v_m > \theta_2(T)\} =$$

$$\frac{1}{P\{v_m > \theta_2(T) \mid X(T)\}}$$

$$E\left\{\int_{\theta_2(T)}^{t+\theta_2(T)} h(s, X(T)) dG(m-1, m, s) \mid X(T)\right\}$$

$$\textcircled{2} \gamma_{N+1} = \alpha_n$$

结论的证明与 ① 类似。

综上知: 在  $\Omega_N$  上,

$$E\{P\{L(t + T - \gamma_{N+1}) \in B,$$

$$\theta_i(t + T - \gamma_{N+1}) \in \Lambda_i, i = 1, 2,$$

$$H_j(t + T - \gamma_{N+1}) \in C_j, j = 1, 2,$$

$$\mid \gamma_{N+1}, X(\gamma_{N+1})\} I_{\mid T < \gamma_{N+1} \leq t+T \mid} \mid X(0)$$

$$\gamma_1, X(\gamma_1), \dots, \gamma_N, X(\gamma_N)\}$$

确实只依赖  $X(T)$ 。至此, 引理 2 得证。

### 3 结 论

假定: 对每一  $m \in \{1, 2, \dots\}$ , 每一  $n \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $F(m-1, m, t)$  和  $G(n-1, n, t)$  都有密度函数, 且依次记为  $f(m-1, m, t)$  和  $g(n-1, n, t)$

由  $L(t)$ ,  $H_1(t)$  和  $H_2(t)$  的定义, 下面的事实亦是明显的:  $\forall t \geq 0$ , 总成立

$$H_2(t) \leq L(t) \leq H_1(t)$$

且

$$L(t) \in \{H_1(t), H_2(t)\} \quad (1)$$

$\forall s \geq 0$ , 定义

$$\lambda_{n-1, n}(s) = \frac{f(n-1, n, s)}{1 - F(n-1, n, s)}, n = 1, 2, \dots$$

$$\mu_{m-1, m}(s) = \frac{g(m-1, m, s)}{1 - G(m-1, m, s)}, m = 1, 2, \dots$$

$$\forall m, n, l \in N, t, u, v \in R^+$$

令

$$P_{m, n, l}(t) = P\{L(t) = m$$

$$H_1(t) = n, H_2(t) = l\}$$

$$\bar{P}_{0, n, l}(t, u) \Delta u = P\{L(t) = 0$$

$$u < \theta_1(t) \leq u + \Delta u, H_1(t) = n, H_2(t) = l\}$$

$$\bar{P}_{m, n, l}(t, u, v) \Delta u \Delta v =$$

$$P\{L(t) = m, u < \theta_1(t) \leq u + \Delta u,$$

$$v < \theta_2(t) \leq v + \Delta v, H_1(t) = n, H_2(t) = l\}$$

易见

$$P_{0, n, l}(t) = \int_0^\infty \bar{P}_{0, n, l}(t, u) du$$

$$P_{m, n, l}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{P}_{m, n, l}(t, u, v) du dv, m \geq 1$$

定理 1

$$\forall m, n, l \in N, t, u, v \in R^+, \bar{P}_{0, n, l}(t, u)$$

和

$$\bar{P}_{m, n, l}(t, u, v)$$

由下面的方程组确定:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}\right] \bar{P}_{0, 0, 0}(t, u) =$$

$$- \sum_{k=1}^\infty \lambda_{k-1, k}(u) \delta_{r_R}(u) \bar{P}_{0, 0, 0}(t, u)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}\right] \bar{P}_{0, n, 0}(t, u) =$$

$$- \sum_{k=1}^\infty \lambda_{k-1, k}(u) \delta_{r_R}(u) \bar{P}_{0, n, 0}(t, u) +$$

$$\int_0^\infty \bar{P}_{l,n,l}(t,u,v) \sum_{q=1}^\infty \mu_{q-1,q}(v) \delta_{n_q}(v) dv, \quad n \geq 1$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right] \bar{P}_{m,n,l}(t,u,v) =$$

$$- \left\{ \sum_{k=1}^\infty \lambda_{k-1,k}(u) \delta_{\tau_R}(u) + \sum_{q=1}^\infty \mu_{q-1,q}(v) \delta_{n_q}(v) \right\}$$

$$\bar{P}_{m,n,l}(t,u,v) \quad m = n > l \geq 0$$

或  $m = l \geq 1, n \geq m,$

$(m, n, l)$  为其它的取值时,

$$\bar{P}_{m,n,l}(t,u,v) = 0 \quad (2)$$

(2) 式中积分边界条件为:

$$\bar{P}_{0,n,0}(t,0) = 0, \quad n \geq 0$$

$$\bar{P}_{m,m,l}(t,u,0) = 0, \quad l \geq 1, m \geq l$$

$$\bar{P}_{m,m,l}(t,0,v) = \int_0^\infty \bar{P}_{m-1,m-1,l}(t,u,v) \cdot$$

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_{k-1,k}(u) \delta_{\tau_R}(u) du, \quad m-1 \geq l, l \geq 1$$

$$\bar{P}_{n,n,0}(t,u,0) = 0$$

$$\bar{P}_{n,n,0}(t,0,v) = 0; \quad n \geq 1$$

$$\bar{P}_{m,n,m}(t,u,0) = \int_0^\infty \bar{P}_{m+1,n,m+1}(t,u,v)$$

$$\sum_{q=1}^\infty \mu_{q-1,q}(v) \delta_{n_q}(v) dv, \quad m \geq 1, n \geq m+1$$

$$\bar{P}_{l,l,l}(t,0,v) =$$

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \bar{P}_{0,n,0}(t,u,v) \sum_{k=1}^\infty \lambda_{k-1,k}(u) \delta_{\tau_R}(u) du$$

其中,  $\bar{P}_{0,n,0}(t,u,v) = \delta_u \bar{P}_{0,n,0}(t,v,v)$

而  $\bar{P}_{0,n,0}(t,v,v)$  由下式确定:

$$\bar{P}_{0,n,0}(t,v,v) \Delta u \Delta v = P\{L(t) = 0$$

$$v < \theta_1(t) \leq v + \Delta u, v < \theta_2(t) \leq v + \Delta v$$

$$H_1(t) = n, H_2(t) = 0\}, \quad n \geq 0$$

初始条件为

$$\bar{P}_{0,n,0}(0,u) = \delta_{n,L(-t_0)} \delta(u - t_0), \quad n \geq 0$$

$$\bar{P}_{m,m,l}(0,u,v) =$$

$$\delta_{m,L(0)} \delta_{l,L(-t^*)} \delta(u - t_0, v - t^*), \quad m \geq l \geq 1$$

$$\bar{P}_{l,n,l}(0,u,v) =$$

$$\delta_{l,L(0)} \delta_{n,L(-t_0)} \delta(u - t_0, v - t^*), \quad n \geq l \geq 1$$

证明 比较马氏过程

$$X(t) = (L(t), \theta_1(t), \theta_2(t), H_1(t), H_2(t))$$

在时刻  $t$  和  $t + \Delta t$  的状态即可。

由以上定理,可导出在任意时刻

$$t(t \geq 0), L(t), H_1(t), H_2(t)$$

的联合分布

$$\{P\{L(t) = m, H_1(t) = n,$$

$$H_2(t) = l\} : t \geq 0, m, n, l \in N\}$$

从而,可以求得  $L(t)$  的瞬时分布如下:

$$\forall m \in N, t \geq 0, P\{L(t) = m\} =$$

$$\sum_{n \in N} \sum_{l \in N} P\{L(t) = m, H_1(t) = n, H_2(t) = l\}$$

参考文献:

- [1] JEUGENI H. Dshalalow, Frontiers in queueing: models and applications in science and engineering[M]. Orlando: CRC, 1997.
- [2] 基赫曼 H H, 斯科罗霍德 A B. 随机过程[M]. 北京: 科学出版社, 1973.
- [3] 侯振挺, 刘万荣, 刘再明, 等. 马尔可夫骨架过程[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000.
- [4] ALFA A S, RAO T S S S. Supplementary variable technique in stochastic models[J]. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2000, 14: 203 - 218.

## Transient Distribution of the Length of a Queueing Model with Input and Service Dependent on the System State

HE Ning-ka, YU Zheng, HU Da-xuan

(School of Mathematical Sciences, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** A queueing system is studied where the arrival times  $\{\tau_m\}$  and service times  $\{v_n\}$  are independent between each other and not identically distributed random variables. Both the distribution of every  $\tau_m$  and the distribution of every  $v_n$  depend on the transient state of the system. Clearly, the queueing system is generalization of GI/G/1 queue. Using supplementary variable technique in stochastic models, a multi-dimensional Markov process which includes the transient queue length of the queue mentioned here as a component is constructed. Then, the integral representation of the transient distribution of the queue length is obtained, under certain conditions, the integrated term in the above representation can be calculated recursively.

**Key words:** queueing system; transient queue length; supplementary variable