

位势理论在估计 Hausdorff 维数中的应用*

贾保国¹, 张倩生¹, 黎培兴¹, 徐志庭²

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;

2. 华南师范大学数学系, 广东 广州 510631)

摘 要: 用位势理论给出了一类非自相似集的 Hausdorff 维数的下界估计。最后, 给出一个具体的例子说明该方法的有效性。

关键词: Hausdorff 维数; s -势; s -能

中图分类号: O174.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 01-0110-03

在分形几何的研究中, 估计分形集的 Hausdorff 维数(以下简称维数)是分形几何研究的重要问题之一, 对自相似集的维数, 已经有系统和完善的理论(见文[1]), 但对非自相似集的维数的研究, 由于缺少有效的方法, 所以困难较大, 主要困难在于维数下界的估计。

本文应用位势理论方法, 研究了一类非自相似集的维数下界的估计, 并且给出具体例子说明定理的有效性。同时, 我们注意到位势理论在解决非自相似集的维数的计算和估计时, 具有特别的优势。这主要体现在这种方法只需要验证某个积分的收敛性, 而不需要估计大量的小集合的质量。

1 定义和引理

设非空集合 $U \subset \mathbf{R}^n$, 定义 U 的直径为 $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$, 即 U 内任何两点距离的上确界。如果 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ 且 $|U_i| \leq \delta$, 则称 $\{U_i\}$ 为 E 的可数 δ -覆盖。

定义 1 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 给定 $s \geq 0$, 对任意 $\delta \geq 0$, 记

$$H_{\delta}^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 为 } E \text{ 的可数 } \delta\text{-覆盖}\right\}$$

当 δ 减少时, $H_{\delta}^s(E)$ 随着增加。定义 $H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(E)$ 。称 $H^s(E)$ 为 E 的 s -维 Hausdorff 测度。易见, 当 $s > t > 0$ 时, 有

$H^t(E) = \infty \Rightarrow H^s(E) = \infty$, $H^s(E) = 0 \Rightarrow H^t(E) = 0$
因此可以定义集合 E 的 Hausdorff 维数 $\dim_H(E)$ 为
 $\dim_H(E) = \inf\{s : H^s(E) = 0\} = \sup\{s : H^s(E) = \infty\}$ 。

定义 2 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, μ 为 E 上的质量分布, $x \in$

E , 称 $\phi_s(x) = \int_E \frac{d\mu(y)}{|x - y|^s}$ 为 μ 在 x 点的 s -位势。称

$$I_s(\mu) = \iint_{E \times E} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s}$$
 为 μ 关于 E 的 s -能。

下面引理来自文[1]64页的定理 4.13。

引理^[1] 设有界集合 E 上的质量分布 μ 满足 $I_s(\mu) < +\infty$, 则 $H^s(E) = +\infty$ 且 $\dim_H(E) \geq s$ 。

2 主要定理

设 $E_0 = [0, 1] \subset \mathbf{R}$, $0 < r_i < \frac{1}{2}$, r_i 是实数, 从 E_0 的中心去掉一个长为 $1 - 2r_1$ 的开区间。

设 $E_1 = [0, r_1] \cup [1 - r_1, 1] = I_1 \cup I_2$ 。再从 E_1 的 2 个子区间的中心各去掉长为 $r_1(1 - 2r_2)$ 的开区间, 设

$$E_2 = [0, r_1 r_2] \cup [r_1 - r_1 r_2, r_1] \cup [1 - r_1, 1 - r_1 + r_1 r_2] \cup$$

$$[1 - r_1 r_2, 1] = I_{11} \cup I_{12} \cup I_{21} \cup I_{22}$$

无限进行以上步骤, E_k 的 2^k 个子区间 $I_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 的长度为

$$|I_{i_1 i_2 \dots i_k}| = r_1 r_2 \dots r_k, i_j = 1, 2, j = 1, 2, \dots, k$$

记 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$

定理 设 $0 < s \leq 1$, 若正项级数

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{(r_1 r_2 \dots r_{j-1})^s} \frac{1}{(1 - 2r_j)^s}$$

收敛, 则 $\dim_H(E) \geq s$ 。

证明 首先在 E 上定义一个质量分布, 取区间 E_0 的均匀质量为 1, 对 E_1 的 2 个长为 r_1 的区间 I_1, I_2 , 定义每个区间具有均匀质量 $1/2$, 依此类推, 定义

* 收稿日期: 2003-02-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10041005); 教育部博士点基金资助项目(1999055810); 广东省自然科学基金资助项目(011221); 中山大学高等学术研究中心资助项目(01M2)

作者简介: 贾保国(1963年生), 男, 副教授; E-mail: mcsjbg@zsu.edu.cn

集 E_j 的每个长为 $r_1 r_2 \cdots r_j$ 的子区间 $I_{i_1 i_2 \cdots i_j}$ 具有均匀质量 $1/2^j$, 乘积集 $E_2 \times E_2$, 见图 1。

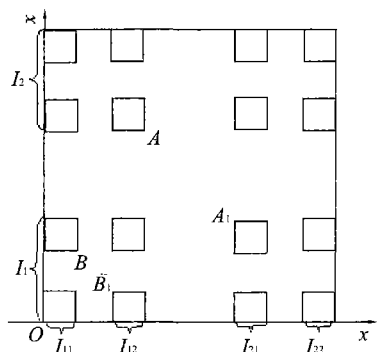


图 1 $E \times E$ 的构造的前 2 步

Fig. 1 The first two steps of $E \times E$ construction

注意到点的坐标为 $(r_1, 1 - r_1)$, 由于 A, A_1 关于直线 $x = y$ 对称, 从而当

$$(x, y) \in I_1 \times I_2 \cup I_2 \times I_1 \text{ 时,}$$

$$|x - y| \geq |1 - r_1 - r_1| = (1 - 2r_1)$$

故对任意 $0 < s \leq 1$ 及 $(x, y) \in I_1 \times I_2 \cup I_2 \times I_1$, 有

$$\frac{1}{|x - y|^s} \leq \frac{1}{(1 - 2r_1)^s}. \text{ 从而}$$

$$\begin{aligned} I_s(\mu) &= \iint_{E \times E} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} = \\ &= \iint_{I_1 \times I_2 \cup I_2 \times I_1} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} + \\ &= \iint_{I_1 \times I_1 \cup I_2 \times I_2} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} \leq \\ &= \frac{1}{(1 - 2r_1)^s} \iint_{I_1 \times I_2 \cup I_2 \times I_1} d\mu(x)d\mu(y) + \\ &= \iint_{I_1 \times I_1 \cup I_2 \times I_2} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\iint_{I_1 \times I_2 \cup I_2 \times I_1} d\mu(x)d\mu(y) = \\ &= \left[\int_{I_1} d\mu(x) \right]^2 + \left[\int_{I_2} d\mu(y) \right]^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故

$$I_s(\mu) \leq \frac{1}{2(1 - 2r_1)^s} + \iint_{I_1 \times I_1 \cup I_2 \times I_2} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s}$$

注意到 B 点的坐标为 $(r_1 r_2, r_1 - r_1 r_2)$, 同理可得

$$\begin{aligned} &\iint_{I_1 \times I_1 \cup I_2 \times I_2} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} = \\ &= \iint_{I_{12} \times I_{11} \cup I_{11} \times I_{12}} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} + \\ &= \iint_{I_{21} \times I_{22} \cup I_{22} \times I_{21}} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iint_{\bigcup_{i,j=1,2} I_{ij} \times I_{ij}} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} \leq \\ &= \frac{1}{(r_1 - 2r_1 r_2)^s} \left\{ 2 \left[\int_{I_{12}} d\mu(y) \right]^2 + 2 \left[\int_{I_{22}} d\mu(y) \right]^2 \right\} + \\ &= \iint_{\bigcup_{i,j=1,2} I_{ij} \times I_{ij}} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} \leq \\ &= \frac{1}{2^2} \frac{1}{(r_1 - 2r_1 r_2)^s} + \iint_{\bigcup_{i,j=1,2} I_{ij} \times I_{ij}} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x - y|^s} \end{aligned}$$

以此类推, 易得

$$\begin{aligned} I_s(\mu) &\leq \frac{1}{2(1 - 2r_1)^s} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{(r_1 - 2r_1 r_2)^s} + \\ &= \frac{1}{2^3} \frac{1}{(r_1 r_2 - 2r_1 r_2 r_3)^s} + \cdots + \\ &= \frac{1}{2^j} \frac{1}{(r_1 r_2 \cdots r_{j-1} - 2r_1 r_2 \cdots r_j)^s} + \cdots = \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{(r_1 r_2 \cdots r_{j-1})^s} \frac{1}{(1 - 2r_j)^s} \end{aligned}$$

故当右边级数收敛时, $I_s(\mu) < +\infty$, 由上节中的引理知, $H^s(E) = +\infty$ 且 $\dim_H(E) \geq s$. 证毕。

3 例子

设 $r_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(j+1)}$, $(j = 1, 2, \cdots)$, E 的构造过程同上, 则 $\dim_H(E) = 1$, 且 $H^1(E) = 0$.

证明 在 E 的构造过程中, 第 j 步的 2^j 个长为 $r_1 r_2 \cdots r_j$ 的区间覆盖了 E , 故由定义 1 得

$$\begin{aligned} H^1_{r_1 r_2 \cdots r_j}(E) &\leq 2^j r_1 r_2 \cdots r_j = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{j+1}\right) \end{aligned}$$

由于右边的无穷乘积收敛到零, 令 $j \rightarrow +\infty$ 得 $H^1(E) = 0$.

由于 $r_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(j+1)}$, $(j = 1, 2, \cdots)$, 从而对任意 $s < 1$, 上节定理中的级数的第 j 项

$$a_j = \frac{1}{2^{j-(j-1)s}} \frac{(j+1)^s}{\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{j}\right)\right]^s}$$

故

$$\begin{aligned} &\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{1-s}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{j+1}\right)^s} \frac{(j+2)^s}{(j+1)^s} = \frac{1}{2^{1-s}} < 1 \end{aligned}$$

所以正项级数 $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j$ 收敛. 由上面的定理知 $\dim_H(E) \geq s$.

上面不等式对任意小于 1 的 s 都成立, 故 $\dim_H(E) \geq 1$, 从而有 $\dim_H(E) = 1$. 证毕。

致谢: 感谢周作领教授的指导。

(下转第 114 页)

简单。

(3) 碰撞检测过程采用递归算法, 充分利用二叉树简单平衡内耗小的特点, 迅速确定碰撞子域。子域中所含的三角面大大减少, 相应减少了精确求交的几何元素, 进一步提高了求交效率。

(4) 在对织物曲面进行区域分割时, 引入了层次化概念, 利用文献[6]提出的简化求解邻近区域的三角形表面曲率的方法, 排除大部分不可能自交的情况, 有效提高织物曲面的自碰撞检测效率。

参考文献:

- [1] 彭群生, 鲍虎军, 金小刚. 计算机真实感图形的算法基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 149-200.
- [2] BARQUET G, CHAZELLE B, GUIBAS L, et al. Hierarchical representation for surfaces in 3D[J]. Proceedings Eurographics'96, 1996, 15(3): 387-396, 484.
- [3] PALMER I J, GRIMSDALE R. Collision detection for animation using sphere-trees[J]. Computer Graphics Forum, 1995, 14(2): 105-116.
- [4] GINO van den B. Efficient collision detection of complex deformable models using AABB trees[J]. J Graphics Tools, 1997, 2(4): 1-14.
- [5] MOORE M, WILHELMS J. Collision detection and response for computer animation [C]. Computer Graphics (SIGGRAPH'88 Proceedings), 1988: 289-298.
- [6] VOLINO P, MAGNENAT T N. Efficient self-collision detection on smoothly discretized surface animations using geometrical shape regularity[J]. Computer Graphics Forum, 1994, 13: 155-166.
- [7] PPROVOT X. Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior[M]. Graphics Interface, 1995: 147-154.

Collision Detection & Response of Flexible Surface

NIE Hui

(School of Information Science & Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Collision detection is one of the bottleneck problems in computer animation field. The solving of the problem affects the real-time effects of the animation. An advanced algorithm based on binary space partition and bounding box technique according to the characters of flexible surface is presented. In this arithmetic, the surface is subdivided into several independent and associated parts. And a hierarchical bounding box tree for the collision object is constructed. Using the recursion method, the collision field can be located quickly and accurate collisions are detected eventually. Most geometric elements that won't be collided are culled out before accurate detection, heavy hierarchy updating work is avoided, and the efficiency of collision detection is highly improved.

Key words: collision detection; hierarchical bounding boxes; binary space partitioning; mass-spring model

(上接第 111 页)

参考文献:

- [1] FALCONER K. Fractal geometry-mathematical foundations and applications[M]. New York: John & Sons, 1990.
- [2] FALCONER K. The geometry of fractal set[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

An Application of Potential Theory in Estimating the Hausdorff Dimension

JIA Bao-guo¹, ZHANG Qian-sheng¹, LI Pei-xing¹, XU Zhi-ting²

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631)

Abstract: By means of the potential theory, the lower bounds of the Hausdorff dimensions of some non-similar sets on a line are obtained. Finally, an example shows that this method is effective.

Key words: Hausdorff dimension; s -potential; s -energy