

# 基于残余力向量的结构损伤识别两步法<sup>\*</sup>

刘济科, 杨秋伟

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

**摘要:** 提出了一种基于残余力向量进行结构损伤识别的两步法。通过计算各单元体的损伤定位标准 (DLAC) 值来判定可能出现损伤的单元; 采用刚度联系向量来代表单元体, 使计算 DLAC 值简单, 且计算量小。利用最佳逼近向量法来精确定位并计算损伤程度。为使该方法更具实用价值, 将最佳逼近向量法从单个损伤推广至多个损伤的情况。算例表明, 此方法仅需一阶模态参数便可有效进行损伤识别, 因而合理可靠、精度高。

**关键词:** 损伤识别; 残余力向量; 两步法

中图分类号: O32 TH113.1 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2004) 04-0001-04

模型修正法是结构损伤识别方法中一类很重要的方法。它通过修正损伤后的结构模型以使其满足新的测量结果。这类方法又可细分为很多种方法, 如残余力向量法, 最小范数修正法, 最小秩修正法, 灵敏度法, 特征结构分配法等<sup>[1]</sup>。Doebbling 推广了最小秩修正法<sup>[2]</sup>, 直接采用单元体刚度参数进行最小秩修正。Lim 等人在最小范数修正法基础上, 提出了最佳逼近特征向量法<sup>[3]</sup>。其基本思想是: 先假设仅某一处单元体发生损伤, 对每个单元体建立一个最佳逼近特征向量, 考察该向量与测量振型之间的接近程度来确定可能损伤位置, 在此基础上再计算损伤程度。

本文在以上两种方法的基础上, 提出了一种新的损伤识别两步法。首先通过计算各单元体的损伤定位标准 (DLAC, damage location assurance criterion) 值来判定可能损伤单元体, 再利用最佳逼近的思想来精确定位并计算损伤程度。以一个 8 自由度的质量—弹簧系统为例验证了本文方法的可行性。算例表明该方法仅需一阶模态参数便可有效进行损伤识别。

## 1 残余力方程

假设损伤前后质量矩阵不变, 则结构系统损伤后的特征方程为

$$(\mathbf{K}_d - \lambda_{dj}\mathbf{M})\phi_{dj} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_u - \Delta\mathbf{K} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{M}$  表示质量矩阵,  $\mathbf{K}_u, \mathbf{K}_d$  分别表示损伤前后系统的刚度矩阵,  $\Delta\mathbf{K}$  表示损伤前后刚度矩阵的变化, 它们均为  $n$  阶方阵,  $\lambda_{dj}, \phi_{dj}$  分别表示损伤后第  $j$  个特征值和振型。

方程 (2) 代入 (1) 中, 整理可得

$$(\mathbf{K}_u - \lambda_{dj}\mathbf{M})\phi_{dj} = \Delta\mathbf{K}\phi_{dj} \quad (3)$$

记向量  $b_j = (\mathbf{K}_u - \lambda_{dj}\mathbf{M})\phi_{dj}$ , 方程 (3) 可改写为

$$\Delta\mathbf{K}\phi_{dj} = b_j \quad (4)$$

方程 (4) 即为残余力方程, 其中,  $b_j$  称为第  $j$  个残余力向量。

## 2 损伤识别的两步法

### 2.1 可能损伤单元体的判定——DLAC

损伤前后刚度变化矩阵  $\Delta\mathbf{K}$  可表示为<sup>[4]</sup>

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{P}\mathbf{A}^T \quad (5)$$

$$\text{其中, } \Delta\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_N \end{bmatrix}, \alpha_i \in [0, 1]$$

$\alpha_i$  为第  $i$  个单元体的刚度损伤参数,  $\alpha_i = 0$  表示单元体未损伤,  $\alpha_i = 1$  表示单元体完全损伤。

$\mathbf{A}$  称为刚度联系矩阵 ( $n \times N$  维,  $n$  为自由度数目,  $N$  为单元体数目), 且  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_N]$ , 其中  $\mathbf{a}_i$  为第  $i$  个单元体的刚度联系向量。 $\mathbf{A}$  在损伤前后不

\* 收稿日期: 2004-03-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10102023); 广东省自然科学基金资助项目 (031588, 001180); 广东省科技计划资助项目 (2002C32405); 高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目; 中山大学高等学术研究中心 (香港) 基金资助项目 (03M4)

作者简介: 刘济科 (1967 年生), 男, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail: jikelu@hotmail.com

变。

方程 (5) 可进一步展开成

$$\Delta \mathbf{K} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T + \alpha_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T + \cdots + \alpha_N \mathbf{a}_N \mathbf{a}_N^T = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \quad (6)$$

方程 (6) 代入 (4) 可得

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\phi}_{dj} = \mathbf{b}_j \quad (7)$$

方程 (7) 中  $\mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\phi}_{dj}$  为一个数值, 令

$$\alpha_i \mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\phi}_{dj} = \beta_i \quad (8)$$

方程 (8) 代入 (7), 有

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_j \quad (9)$$

由方程 (9) 可知, 残余力向量是各单元体刚度联系向量的线性组合。假设仅第  $i$  个单元体损伤, 即仅  $\alpha_i \neq 0$ , 其它  $N-1$  个刚度损伤参数均为零, 方程(9) 变为

$$\beta_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_j \quad (10)$$

定义单元体的刚度联系向量  $\mathbf{a}_i$  与残余力向量  $\mathbf{b}_j$  间的夹角余弦值的平方为损伤定位标准 DLAC, 即

$$DLAC_{ij} = \frac{(\mathbf{a}_i^T \circ \mathbf{b}_j)^2}{(\mathbf{a}_i^T \circ \mathbf{a}_i)(\mathbf{b}_j^T \circ \mathbf{b}_j)} \quad (11)$$

若  $DLAC_{ij} = 1$ , 则损伤仅由第  $i$  个单元体引起, 为单个损伤情况。对于多个损伤, 不存在  $DLAC_{ij} = 1$  的情况, 此时, 可依次计算各单元体的 DLAC 值, 该值较大者即为可能发生损伤的单元体。

2.2 损伤的精确定位——最佳逼近向量法

不失一般性, 设可能损伤单元体为 (以各单元体的刚度联系向量表示)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$ , 此时方程 (9) 变为

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_j \quad (12)$$

记  $\mathbf{L}_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m]$ , 方程 (12) 变为

$$\mathbf{L}_1 \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{Bmatrix} = \mathbf{b}_j \quad (13)$$

由方程 (13), 对  $\mathbf{b}_j$  建立其最佳逼近向量

$$\mathbf{b}_{2j}^a = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^+ \mathbf{b}_j \quad (14)$$

其中, 上标 “+” 表示广义逆。定义向量  $\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{2j}^a$  的偏差为

$$d_{1j} = \|\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_{2j}^a\|_2^2 \quad (15)$$

其中,  $\|\cdot\|_2$  表示 2-范数。当  $d_{1j}$  为 0 时, 表明可能损伤单元体没有漏选, 实际损伤的单元体必包含在  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$  中。

利用如下的筛选方法来去掉未损伤单元体, 保留实际损伤单元体:

① 假设  $\mathbf{a}_1$  未发生损伤, 先去掉  $\mathbf{a}_1$ , 可能损伤单元体组合形成矩阵  $\mathbf{L}_2 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \cdots, \mathbf{a}_m]$ , 则方程 (13) 变为

$$\mathbf{L}_2 \begin{Bmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{Bmatrix} = \mathbf{b}_j \quad (16)$$

相应最佳逼近向量为

$$\mathbf{b}_{2j}^a = \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_2^+ \mathbf{b}_j \quad (17)$$

计算偏差为

$$d_{2j} = \|\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_{2j}^a\|_2^2 \quad (18)$$

若  $d_{2j}$  仍很小(近似为 0), 表明  $\mathbf{a}_1$  未发生损伤, 下轮可能损伤单元体组合中不再保留它; 若  $d_{2j}$  较大(相对于 0 而言), 则表明  $\mathbf{a}_1$  为实际发生损伤单元, 下轮计算中仍应保留它。

这里不妨假设  $\mathbf{a}_1$  未发生损伤, 将其从组合中剔除。

② 再假设  $\mathbf{a}_2$  未发生损伤, 去掉  $\mathbf{a}_2$ , 可能损伤单元体组合形成矩阵

$$\mathbf{L}_3 = [\mathbf{a}_3, \cdots, \mathbf{a}_m]$$

同理可计算  $d_{3j}$ , 根据它的值大小来决定  $\mathbf{a}_2$  是否损伤及下轮计算中是否保留。

依此类推, 最终可将未发生损伤单元体逐次剔除, 剩下的就是实际损伤单元体。

③ 将最终所得损伤单元体组合成矩阵  $\mathbf{L}_r$ , 各对应  $\beta_i$  组合成向量  $\{\beta\}$ , 由方程(12), 有

$$\mathbf{L}_r \{\beta\} = \mathbf{b}_j \quad (19)$$

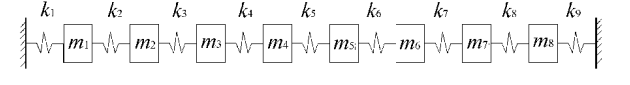
于是可解得

$$\{\beta\} = \mathbf{L}_r^+ \mathbf{b}_j \quad (20)$$

方程 (20) 联立方程 (8) 即可求得各损伤程度值  $\alpha_i$ 。

3 算 例

以图 1 所示的 8 自由度质量—弹簧系统为例, 来验证上述方法的可行性。



$k_i = 1 (i = 1, 2, \cdots, 9), m_i = 1 (i = 1, 2, \cdots, 8)$

图 1 8 自由度质量—弹簧系统

Fig 1 Mass-spring system with 8 degrees of freedom

系统的刚度联系矩阵为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9]$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中

$$\begin{aligned}a_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T; \\a_2 &= (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T; \\a_3 &= (0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0)^T; \\a_4 &= (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0)^T; \\a_5 &= (0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0)^T; \\a_6 &= (0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0)^T; \\a_7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)^T; \\a_8 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1)^T; \\a_9 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T\end{aligned}$$

系统损伤前刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

3.1 单个损伤情况

设第 3 个弹簧刚度损失 20%，即损伤后  $k_3 = 0.8$ ，其它弹簧不变。仅计算第一阶模态，可得  $b_1 = (0, 0.0254, -0.0254, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ ， $\lambda_{d1} = 0.1179$

各单元体的  $DLAC_{i1}$  值列于表 1。  
由表 1 可见， $DLAC_{31} = 1$ ，而其相邻单元  $DLAC_{21} = DLAC_{41} = 0.25$ ，其它非相邻单元体的  $DLAC_{i1}$  值均为零。故对单个损伤， $DLAC$  值能够清楚地指明损伤发生的位置。由方程 (20) 可求得  $\beta_3 = 0.0254$ ，代入 (8) 式可计算损伤程度  $\alpha_3 = 0.2003$ ，与假设的损伤 0.2 相比误差很小。

表 1 单个损伤情况的  $DLAC_{i1}$  值

Tab. 1 The results of single damage

| 单元          | 1 | 2    | 3 | 4    | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------------|---|------|---|------|---|---|---|---|---|
| $DLAC_{i1}$ | 0 | 0.25 | 1 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

3.2 多个损伤情况

设第 3 个弹簧损失 20%，第 5 个弹簧损失 40%，亦即损伤后  $k_3 = 0.8, k_5 = 0.6$ ，以系统前四阶模态参数来计算，各单元体的  $DLAC$  值列于表 2。

由表 2 可知：

- ① 对某一阶模态而言， $DLAC$  值最大者必对应发生损伤单元体；
- ② 与损伤位置相邻单元体的  $DLAC$  值较大；远离损伤区域的各单元  $DLAC$  值很小；
- ③ 不同模态对损伤位置敏感程度不同，有的对这个单元损伤敏感，对其它的却不敏感；而有的则恰恰相反；如表 2 中第 1、3 阶模态对位置 3 敏感，对应  $DLAC$  值很大；对位置 5 却不敏感，对应  $DLAC$  值很小；而第 2、4 阶模态则恰恰相反；
- ④ 联合相邻两阶模态识别效果较好，如表 2 中取第 1、2 阶模态可清楚表明第 3、5 单元体损伤，而 2、4、6 单元是否损伤还有待精确判定。

精确定位及损伤程度求解过程如下：

不失一般性，考虑仅有第一阶模态的情况。取所有可能损伤单元体组合，构成矩阵  $L_1 = [a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$ ，可计算出  $d_{11} = 6.4 \times 10^{-32}$ ，说明没有漏选。首先去掉  $a_2$  形成矩阵  $L_2 = [a_3, a_4, a_5, a_6]$ ，可求得  $d_{21} = 6.5 \times 10^{-32}$ ，说明  $a_2$  对应单元未损伤，下轮组合不再保留  $a_2$ ；再去掉  $a_4$  形成矩阵  $L_3 = [a_3, a_5, a_6]$ ，可求得  $d_{31} = 1.7 \times 10^{-31}$ ，说明  $a_4$  未损伤，不参与下轮运算；再去掉  $a_5$  形成矩阵  $L_4 = [a_3, a_6]$ ，可求得  $d_{41} = 5.5 \times 10^{-6}$ ， $a_5$  显然为实际损伤单元体，下轮计算必须保留。最后去掉  $a_6$  形成  $L_5 = [a_3, a_5]$ ，可求得  $d_{51} = 2.3 \times 10^{-31}$ ， $a_6$  未损伤。故最终可确定  $a_3, a_5$  损伤。以上讨论可见，仅采用第一阶模态，虽然用  $DLAC$  标准只能清楚表明单元 3 损伤，

表 2 多个损伤情况的  $DLAC$  值

Tab. 2 The results of double damages

| 模态 $i$ | 1          | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7          | 8          | 9          |
|--------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|------------|------------|------------|
| 1      | $10^{-30}$ | 0.2486 | 0.9943 | 0.2125 | 0.0057 | 0.0014 | $10^{-29}$ | $10^{-29}$ | $10^{-30}$ |
| 2      | $10^{-31}$ | 0.0001 | 0.0004 | 0.2600 | 0.9996 | 0.2499 | $10^{-30}$ | $10^{-30}$ | $10^{-30}$ |
| 3      | $10^{-30}$ | 0.2293 | 0.9173 | 0.1123 | 0.0827 | 0.0207 | $10^{-30}$ | $10^{-31}$ | $10^{-31}$ |
| 4      | $10^{-32}$ | 0.0292 | 0.1169 | 0.0893 | 0.8831 | 0.2208 | $10^{-30}$ | $10^{-30}$ | $10^{-30}$ |

不能清楚表明单元 5 损伤, 但进一步采用的最佳逼近向量法却能清楚说明单元 5 损伤。

由以上结果, 可解得

$$\begin{Bmatrix} \beta_3 \\ \beta_5 \end{Bmatrix} = \mathbf{L}_5^+ \mathbf{b}_1 = \begin{Bmatrix} -0.0254 \\ 0.0019 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

将方程(21) 代入(8) 可求出损伤程度  $\alpha_3 = 0.199$ ,  $\alpha_5 = 0.396$ , 与假设的损伤 0.2, 0.4 相比误差很小, 说明本文方法合理可靠、精度高。

4 结 论

利用两步法进行损伤识别有利于提高识别效率与精度。本文从残余力方程出发, 以损伤定位标准值来确定可能损伤单元, 再利用最佳逼近向量法来

精确定位及计算损伤程度。算例表明, 无论对单个损伤还是多个损伤, 该方法仅需一阶模态参数便可有效识别损伤, 计算简单, 且有足够精度。

参考文献:

[ 1 ] DOEBLING S W, FARRAR C R, PRIME M B. A summary review of vibration-based damage identification methods[ J]. The Shock and Vibration Digest, 1998; 30(2): 91—105.

[ 2 ] DOEBLING S W. Minimum rank optimal update of elemental stiffness parameters for structural damage identification[ J]. AIAA J, 1996; 34(12): 2615—2621.

[ 3 ] LIM T W, KASHANGAKI T A L. Structural damage detection of space truss structures using best achievable eigenvectors[ J]. AIAA J, 1994; 32(5): 1049—1057.

A Two-step Method for Structural Damage Identification  
Based on Residual Force Vector

LIU Ji ke, YANG Qiu wei

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** A two step method based on residual force vector is presented for structural damage identification. Firstly, the damage location assurance criterion (DIAC) values of each element are calculated to preliminarily estimate the damage elements. The introduction of the stiffness connectivity vector to represent the element makes it very simple to calculate the DIAC values. Secondly, the best achievable vector method is used to locate and evaluate the damage more accurately. For purpose of engineering applications, the best achievable vector method is extended to deal with the case of multiple damages. An illustrative example is given to verify the proposed two step method. The identification results show that the present method is very effective.

**Key words:** damage identification; residual force vector; two step method