

奇异二阶微分系统边值问题*

白定勇¹, 马如云²

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275;
2. 西北师范大学数学系, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 运用锥拉伸与锥压缩原理, 在适当的条件下建立一类奇异二阶微分系统边值问题正解的存在性. 突破了有关文献中要求非线性项超线性或次线性增长的限制.

关键词: 奇异边值问题; 锥; 不动点; 正解

中图分类号: O175.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 02-0129-04

由于广泛的数学与物理应用背景, 近年来, 人们对于二阶奇异微分方程边值问题的研究非常活跃, 如文[1-3]及它们的参考文献. 但是对于常微分方程组边值问题及其奇异情形的结果并不多见(参见文[4-8]). 本文讨论如下形式的奇异二阶微分系统

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)f(x, y) = 0 \\ y''(t) + b(t)g(x, y) = 0, \quad 0 < t < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0$$

正解的存在性. 其中 $f, g \in C([0, \infty)) \times [0, \infty)$, $[0, \infty)$, $a, b \in C((0, 1), [0, \infty))$. 假设

$$(H) 0 < \int_0^1 s(1-s)(a(s) + b(s))ds < \infty,$$

$$\exists \theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \int_\theta^{1-\theta} a(s)ds > 0, \int_\theta^{1-\theta} b(s)ds > 0$$

称 (x, y) 为问题(1)的正解, 是指

$$(x, y) \in (C^+[0, 1] \cap C^2(0, 1)) \times (C^+[0, 1] \cap C^2(0, 1))$$

x 与 y 不同时恒为零, 且满足系统(1).

对任意函数 $h \in C([0, \infty) \times [0, \infty), [0, \infty))$,

记

$$h_0 = \lim_{x+y \rightarrow 0^+} \frac{h(x, y)}{x+y}$$

$$h_\infty = \lim_{x+y \rightarrow \infty^+} \frac{h(x, y)}{x+y}$$

$$h^0 = \overline{\lim}_{x+y \rightarrow 0^+} \frac{h(x, y)}{x+y}$$

$$h^\infty = \overline{\lim}_{x+y \rightarrow \infty^+} \frac{h(x, y)}{x+y}$$

文[5-8]虽然对问题(1)建立了正解及多个正解的存在性结果, 但都是在非奇异情形下的讨论.

本文允许 $a(t)$ 和 $b(t)$ 都在 $[0, 1]$ 的端点 $t=0$ 和 $t=1$ 处具有适当的奇性, 不要求非线性项 f 和 g 在端点($t=0$ 或 $t=1$)超线性或次线性增长(如文[1]), 应用锥拉伸压缩原理, 在更一般的生长条件下建立问题(1)正解的存在性. 本文推广了文[1, 4]中的相应结果.

1 基本引理

记 $X = C[0, 1]$, 其上范数为通常上确界范数.

记 $E = X \times X$, 定义范数

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|, \quad \forall (x, y) \in E$$

则 E 为 Banach 空间. 定义算子 F :

$$F(x, y)(t) = \left[\int_0^1 G(t, s)a(s)f(x(s), y(s))ds, \int_0^1 G(t, s)b(s)g(x(s), y(s))ds \right]^T = (A(x, y)(t), B(x, y)(t))$$

其中, $G: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ 为方程 $u''(t) = 0$, $0 < t < 1$, 在边值条件 $u(0) = u(1) = 0$ 下的 Green 函数:

$$G(t, s) = \begin{cases} (1-t)s, & 0 \leq s \leq t, \\ t(1-s), & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

不难验证下列事实:

(1) 若 $(x, y) \in C^+[0, 1] \times C^+[0, 1]$, 则 $A(x, y)(t), B(x, y)(t)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续.

(2) 若 $(x, y) \in C^+[0, 1] \times C^+[0, 1]$, 则

$$A''(x, y)(t) = -a(t)f(x, y)$$

$$B''(x, y)(t) = -b(t)g(x, y)$$

$$A(x, y) \in C^+[0, 1] \cap C^2(0, 1)$$

$$B(x, y) \in C^+[0, 1] \cap C^2(0, 1)$$

* 收稿日期: 2003-05-02

基金项目: 教育部高等学校骨干教师资助计划项目 (GG-110-10736-1003); 师范大学知识与科技创新工程项目 (NWN-UKJXGC-212)

作者简介: 白定勇 (1972年生), 男, 博士生, 韶关学院数学系讲师; E-mail: mcp03bdy@student.zsu.edu.cn

(3) 若 $(x, y) \in C^+[0, 1] \times C^+[0, 1]$, $F(x, y) = (x, y)$, 则 (x, y) 为问题(1) 的解。

(4) F 是全连续算子。事实上, 与以往大量文献一样, 比如文[1] 和[2]。容易验证 A, B 均全连续。

令 $K = \{(x, y) \in E; x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, t \in [0, 1], \min_{t \in [0, 1]} (x(t) + y(t)) \geq \theta \| (x, y) \| \}$ 则 K 是 E 中的锥。现证 $FK \subset K$ 。事实上, 对任意 $(x, y) \in K, t \in [0, 1]$, 有

$$\|A(x, y)\| = \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(x(s) y(s)) ds \leq \int_0^1 G(s, s) a(s) f(x(s), y(s)) ds$$

$$\|B(x, y)\| \leq \int_0^1 G(s, s) b(s) g(x(s), y(s)) ds$$

另外, 容易验证 $\frac{G(t, s)}{G(s, s)} \geq \theta, t \in [\theta, 1 - \theta]$ 。因此

$$\begin{aligned} \min_{t \in [\theta, 1 - \theta]} (A(x, y)(t) + B(x, y)(t)) &= \min_{t \in [\theta, 1 - \theta]} \left(\int_0^1 G(t, s) a(s) f(x(s), y(s)) ds + \int_0^1 G(t, s) b(s) g(x(s), y(s)) ds \right) \geq \\ &\min_{t \in [\theta, 1 - \theta]} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(x(s), y(s)) ds + \min_{t \in [\theta, 1 - \theta]} \int_0^1 G(t, s) b(s) g(x(s), y(s)) ds \geq \\ &\theta \left(\int_0^1 G(s, s) a(s) f(x(s), y(s)) ds + \int_0^1 G(s, s) b(s) g(x(s), y(s)) ds \right) \geq \\ &\theta (\|A(x, y)\| + \|B(x, y)\|) \end{aligned}$$

下述引理在本文证明中至关重要 (见文 [9, 10])。

引理 1 设 K 是 Banach 空间 E 中的锥, 又设 Ω_1, Ω_2 为 E 中的 2 个开子集, $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$, 算子 $F: K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ 全连续, 且使下述二者之一成立:

- (1) $\|Fu\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1;$
 $\|Fu\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2;$
- (2) $\|Fu\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1;$
 $\|Fu\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$

则 F 在 $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 中至少有一个不动点。

2 主要结果及其证明

定理 1 设条件 (H) 成立, 若下列条件之一成立:

- (1) $0 \leq f^0 < M, 0 \leq g^0 < M$, 且 $m < f_\infty \leq \infty$ 或 $m < g_\infty \leq \infty$;

- (2) $0 \leq f^\infty < M, 0 \leq g^\infty < M$, 且 $m < f_0 \leq \infty$

或 $m < g_0 \leq \infty$;

其中

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \int_0^1 G(s, s) (a(s) + b(s)) ds, \\ m^{-1} &= \min \left\{ \theta \max_{t \in [0, 1]} \int_0^{1-\theta} G(t, s) a(s) ds, \right. \\ &\quad \left. \theta \max_{t \in [0, 1]} \int_0^{1-\theta} G(t, s) b(s) ds \right\} \end{aligned}$$

则问题 (1) 至少存在一个正解。

证明 (1) 设 $f^0 < M, g^0 < M, f_\infty > m$ (若 $g_\infty > m$ 成立同样可证)。取 $0 < \epsilon < 1$, 使 $f^0 \leq M - \epsilon, g^0 \leq M - \epsilon, f_\infty \geq m + \epsilon$ 。则 $\exists 0 < r < R^*$, 当 $0 < x, y \leq r$ 时, $f(x, y) \leq (M - \epsilon)(x + y), g(x, y) \leq (M - \epsilon)(x + y)$; 当 $x + y \geq R^*$ 时, $f(x, y) \geq (m + \epsilon)(x + y)$ 。

令 $\Omega_1 = \{(x, y) \in E; \|(x, y)\| < r\}$ 。则对 $\forall (x, y) \in K \cap \partial\Omega_1$, 有

$$\begin{aligned} \|A(x, y)\| &\leq \int_0^1 G(s, s) a(s) f(x(s), y(s)) ds \leq \\ &(M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) a(s) ds \|(x, y)\| \end{aligned}$$

同样地, $\|B(x, y)\| \leq$

$$(M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) b(s) ds \|(x, y)\|$$

从而,

$$\begin{aligned} \|F(x, y)\| &= \|A(x, y)\| + \|B(x, y)\| \leq \\ &(M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) (a(s) + b(s)) ds \|(x, y)\| \leq \\ &\|(x, y)\| \end{aligned}$$

取 $R > \frac{1}{\theta} R^*$, 令

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in E; \|(x, y)\| < R\}$$

则对 $\forall (x, y) \in K \cap \partial\Omega_2$, 注意到

$$\min_{t \in [\theta, 1-\theta]} (x(t) + y(t)) \geq \theta R > R^*$$

有

$$\begin{aligned} \|A(x, y)\| &\geq \\ &(m + \epsilon) \theta \int_0^{1-\theta} G(t, s) a(s) ds \|(x, y)\| \\ &\quad \forall t \in [\theta, 1] \end{aligned}$$

从而, $\|F(x, y)\| \geq \|A(x, y)\| \geq$

$$\begin{aligned} &(m + \epsilon) \theta \max_{t \in [0, 1]} \int_0^{1-\theta} G(t, s) a(s) ds \|(x, y)\| \geq \\ &\|(x, y)\| \end{aligned}$$

综上所述, 由引理 1 之 (1), F 在 $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 中至少存在一个不动点, 也即问题(1) 至少存在一个正解。

(2) 设 $f^\infty < M, g^\infty < M, f_0 > m$ (若 $g_0 > m$ 成立, 同样可证)。取 $0 < \epsilon < 1$, 使 $f^\infty \leq M - \epsilon, g^\infty \leq$

$M - \epsilon, f_0 \geq m + \epsilon$. 则 $\exists r > 0$, 当 $0 < x, y \leq r$ 时,
 $f(x, y) \geq (m + \epsilon)(x + y)$. 令 $\Omega_1 = \{(x, y) \in E: \| (x, y) \| < r\}$. 则对 $\forall (x, y) \in K \cap \partial\Omega_1$, 有

$$\| A(x, y) \| \geq (m + \epsilon) \theta \int_0^{1-\theta} G(t, s) a(s) ds \| (x, y) \| \quad \forall t \in [0, 1]$$

从而,

$$\| F(x, y) \| \geq \| A(x, y) \| \geq (m + \epsilon) \theta \max_{t \in [0, 1]} \int_0^{1-\theta} G(t, s) a(s) ds \| (x, y) \|$$

现在令 $\tilde{f}(w) = \max_{0 \leq x+y \leq w} f(x, y)$, $\tilde{g}(w) = \max_{0 \leq x+y \leq w} g(x, y)$, 则 $\tilde{f}^\infty \leq M - \epsilon$, $\tilde{g}^\infty \leq M - \epsilon$. $\exists R > 2r$, 当 $w \geq R$ 时, 有 $\tilde{f}(w) \leq (M - \epsilon)w$, $\tilde{g}(w) \leq (M - \epsilon)w$. 令 $\Omega_2 = \{(x, y) \in E: \| (x, y) \| < R\}$. 则对 $\forall (x, y) \in K \cap \partial\Omega_2$, 有

$$\| A(x, y) \| \leq \int_0^1 G(s, s) a(s) f(x(s), y(s)) ds \leq \int_0^1 G(s, s) a(s) \tilde{f}(R) ds \leq (M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) a(s) ds R$$

$$\| B(x, y) \| \leq (M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) b(s) ds R$$

所以,

$$\| F(x, y) \| \leq (M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) (a(s) + b(s)) ds R = \| (x, y) \|$$

综上所述, 由引理 1 之 (2), F 在 $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 中至少存在一个不动点, 也即问题 (1) 至少存在一个正解.

定理 2 设条件 (H) 成立, 如果下述条件之一满足:

$$(1) \exists p > 0, \text{使 } 0 \leq \overline{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq y \leq p} \frac{f(x, y)}{x}} < M, 0 \leq$$

$$\overline{\lim_{y \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq x \leq p} \frac{g(x, y)}{y}} < M, \text{且 } m < f_\infty \leq \infty \text{ 或 } m < g_\infty \leq \infty,$$

$$(2) \exists p > 0, \text{使 } 0 \leq \overline{\lim_{y \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq x \leq p} \frac{f(x, y)}{y}} < M, 0 \leq$$

$$\overline{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq y \leq p} \frac{g(x, y)}{x}} < M, \text{且 } m < f_\infty \leq \infty \text{ 或 } m < g_\infty \leq \infty.$$

其中, M 和 m 同定理 1 中取法. 则问题 (1) 至少存在一个正解.

证明 (1) 取 $0 < \epsilon < 1$, 使

$$\overline{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq y \leq p} \frac{f(x, y)}{x}} \leq M - \epsilon,$$

$$\overline{\lim_{y \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq x \leq p} \frac{g(x, y)}{y}} \leq M - \epsilon, f_\infty \geq m + \epsilon$$

(若 $g_\infty > m$ 成立, 同样可证)

则 $\exists 0 < r \leq p$, 当 $0 < x, y \leq r$ 时,

$$f(x, y) \leq (M - \epsilon)x, g(x, y) \leq (M - \epsilon)y$$

令 $\Omega_1 = \{(x, y) \in E: \| (x, y) \| < r\}$

则对 $\forall (x, y) \in K \cap \partial\Omega_1$, 有

$$\| A(x, y) \| \leq \int_0^1 G(s, s) a(s) f(x(s), y(s)) ds \leq (M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) a(s) ds \| x \|,$$

$$\| B(x, y) \| \leq (M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) b(s) ds \| y \|\quad \text{从而,}$$

$$\| F(x, y) \| \leq$$

$$(M - \epsilon) \int_0^1 G(s, s) (a(s) + b(s)) ds \| (x, y) \| \leq$$

$$\| (x, y) \|\quad \text{由 } f_\infty \geq m + \epsilon \text{ 知, } \exists R_1 > 2p, \text{当 } x + y \geq R_1 \text{ 时,}$$

$f(x, y) \geq (m + \epsilon)(x + y)$

$$f(x, y) \geq (m + \epsilon)(x + y)$$

取 $R > \frac{1}{\theta} R_1$, 令

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in E: \| (x, y) \| < R\}$$

则对 $\forall (x, y) \in K \cap \partial\Omega_2$, 注意到

$$\min_{t \in [0, 1-\theta]} \geq \theta R > R_1$$

有

$$\| A(x, y) \| \geq$$

$$(m + \epsilon) \theta \int_0^{1-\theta} G(t, s) a(s) ds \| (x, y) \|,$$

$$\forall t \in [0, 1]$$

从而, $\| F(x, y) \| \geq \| A(x, y) \| \geq$

$$(m + \epsilon) \theta \max_{t \in [0, 1-\theta]} \int_0^{1-\theta} G(t, s) a(s) ds \| (x, y) \| \geq$$

$$\| (x, y) \|\quad \text{综上所述, 由引理 1 (1), } F \text{ 在 } K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \text{ 中至少存在一个不动点, 也即问题 (1) 至少存在一个正解.}$$

(2) 类似 (1) 的证明.

参考文献:

- [1] 马如云. 奇异二阶边值问题的正解[J]. 数学学报, 1998, 41(6): 1225—1230.
- [2] 毛安民, 薛美. 奇异边值问题的正解[J]. 数学学报, 2001, 44(5): 899—909.
- [3] 王宏洲, 葛渭高. 奇异边值问题的正解存在性[J]. 数学学报, 1999, 42(1): 111—118.
- [4] 白定勇. 奇异二阶微分系统的正解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2001, 17(1): 70—73.
- [5] 白定勇. 非线性二阶微分系统正解的存在性. 数学物理学报[J], 2003, 23(1): 38—44.

[6] MA R Y. Existence of positive solutions for elliptic systems [J] . J Math Anal Appl, 1996, 201: 375—386.

[7] DUNNINGER D R, WANG H Y. Existence and multiplicity of positive solutions for elliptic systems[J] . Non Anal, 1997, 29(9): 1051—1060.

[8] FINK A M, GATICA J A. Positive solutions of second order systems of boundary value problems[J] . J Math Anal Appl, 1993, 180: 93—108.

[9] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法 [M] . 济南: 山东科学技术出版社, 1995.

[10] DEIMLING K. Nonlinear Functional Analysis[M] . Berlin: Springer-Verlag, 1985.

A Singular Second Order Differential Systems of Boundary Value Problem

BAI Ding yong¹, MA Ru yun²

(1.Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;
2.Department of Mathematics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The existence of positive solutions for a singular second order differential systems of boundary value problems is established by using fixed point theorems on a cone. The main results here improve and generalize the works of other references in sublinear and superlinear cases.

Key words: singular boundary value problem; cone; fixed point; positive solution

(上接第 128 页)

参考文献:

[1] 张引, 潘云鹤. 彩色汽车图象牌照定位新方法[J] . 中国图象图形学报, 2001, 6A(4): 374—377.

[2] 郭捷, 施鹏飞. 基于颜色和纹理分析的车牌定位方法 [J] . 中国图象图形学报, 2002, 7A(5): 472—475.

[3] 戴青云, 余英林. 一种基于小波与形态学的车牌图象分割方法[J] . 中国图象图形学报, 2000, 5A(5): 412—413.

[4] KAMAT V, GANESAN S. An efficient implementation of the Hough transform for detecting vehicle license plates using DSP'S // Proceeding of Real-Time Technology and Applications Symposium[M] . CA: IEEE Computer Society Press, 1995: 58—59.

[5] 左奇, 史忠科. 一种基于数学形态学的实时车牌图象分割方法[J] . 中国图象图形学报, 2003, 8A(5): 281—285.

[6] 章毓晋. 图象工程(上册)[M] . 北京: 清华大学出版社, 1999.

A Synthesize Approach for Locating and Segmenting Vehicle License Plates

ZHANG Shu bo, LAI Jian huang

(School of Mathematics and Computational Sciences, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A new approach of Vehicle License Plate Locating and Segmenting based on color space and statistical letter-frequency analysis is introduced. The algorithm employs information of the color image in HSV color space to construct a five-scale gray image, pre-processes the image with morphological method, then locates and segments the vehicle license plate by analyzing and discriminating the statistical letter frequency property of every possible regions. The algorithm is neither confined to the size or the position of the plate, nor limited to the background or illumination condition of image. Experiments show that the locating and segmenting method is harmony with human vision, and is effective even for image with noises.

Key words: HSV color space; mathematical morphology; statistical letter frequency