

超模序及其在离散排队系统中的应用^{*}

周文慧¹, 邓永录²

(1. 华南理工大学工商管理学院, 广东 广州 510640;

2. 中山大学统计科学系, 广东 广州 510275)

摘要: 总结了超模序的一些性质, 这些性质充分地说明了超模序能刻画随机向量的正相关性的强度。并证明了一个新的性质。最后给出了超模序在有正相关到达的离散时间排队系统中的应用, 得到了队长的一些随机比较结果, 并分析了有 Bernoulli 相关到达和消息长度相关的 N 源消息到达 2 个具体的模型。

关键词: 超模序; 正相关性; 离散时间排队系统

中图分类号: O226 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2004) 06-0166-04

随着应用领域所提出的排队系统模型越来越复杂, 传统的排队系统分析方法已经显得有些力不从心。现在, 已经有很多人开始注意随机序了, 希望能够通过随机比较的方法得到复杂排队系统的一些界。超模序是用来刻画随机向量正相关性的一种很有用的多维随机序。已经有文章介绍和分析超模序 (见文 [1—3])。最近 Müller 等^[4] 写了一篇有关超模序的总结性文章。本文总结超模序的一些性质, 这些性质充分地说明了超模序能刻画随机向量的正相关性的强度。并证明了一个在排队系统分析中有用的新的性质命题 1。最后给出了超模序在有正相关到达的离散时间排队系统中的应用, 得到了队长的一些随机比较结果, 并分析了有 Bernoulli 相关到达和消息长度相关的消息到达 2 个具体的模型。

本文的基本结构为: 第 1 节总结超模序的一些性质, 第 2 节定义随机变量的正相关性。最后一节给出了超模序在离散时间排队系统分析中的应用。

1 超模序

现在已经有很多序提出用来描述和比较随机向量的相关性, 本文着重于超模序的应用。

超模序是一种能很好刻画随机向量正相关性的多维随机序。下面先总结一些已有的成果。

定义 1 函数 $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 被称为超模的 (supemodular), 如果对所有的 $X, Y \in \mathbf{R}^n$ 有:

$$\phi(X \vee Y) + \phi(X \wedge Y) \geq \phi(X) + \phi(Y)$$

其中,

$$X \vee Y = (X_1 \vee Y_1, X_2 \vee Y_2, \dots, X_n \vee Y_n),$$

$$X \wedge Y = (X_1 \wedge Y_1, X_2 \wedge Y_2, \dots, X_n \wedge Y_n)$$

运算符 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别代表取最小和最大运算。

定义 2 记 Φ 为一簇 Borel 可测函数 $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow$

$\mathbf{R}$, 称 n 维向量 X 和 Y 满足关系 $X \leq_{\Phi} Y$, 如果

$$E[\psi(X)] \leq E[\psi(Y)] \quad (1)$$

对所有存在有限数学期望的函数 $\psi \in \Phi$ 成立。

定义 3 n 维随机向量 X 和 Y 满足:

(1) $X \leq_{\text{icx}} Y$, 如果 (1) 式对所有递增凸函数 $\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 成立;

(2) $X \leq_{\text{sm}} Y$, 如果 (1) 式对所有超模函数 $\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 成立;

下面给出几个超模序的性质。

定理 1 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 为 n 维的随机向量, $X \leq_{\text{sm}} Y$, 则

(1) $x_i =_{\text{s}} y_i, i = 1, 2, \dots, n$, (这里 $=_{\text{s}}$ 表示 2 个随机变量依分布相等)。

(2) $\text{Cov}(x_i, x_j) \leq \text{Cov}(y_i, y_j)$ 对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 成立。

证明 只要定义超模函数

$$\Psi_Z(X) = I_{\{X; X > Z\}}(X), \phi_Z(X) = I_{\{X; X \leq Z\}}(X)$$

和 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i x_j$ 即可得证。

由以上命题可看出, 超模序可以比较边缘分布相同, 相关性不同的随机向量。下面再从文[3] 直接引出超模序的封闭性质, 而略去证明。

定理 2^[3]

(1) $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 是 2 个随机向量。如果

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq_{\text{sm}} (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

则 $(g_1(X_1), g_2(X_2), \dots, g_n(X_n)) \leq_{\text{sm}}$

$$(g_1(Y_1), g_2(Y_2), \dots, g_n(Y_n))$$

对所有单调函数 $g_i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n$ 成立。

* 收稿日期: 2003-11-12

作者简介: 周文慧 (1976 年生), 男, 博士; E-mail: whzhou@scut.edu.cn

(2) $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 是 2 个随机向量。如果 $X \leq_{sm} Y$ 则对所有 $I \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ 有 $X_I \leq_{sm} Y_I$ 。

(3) X, Y 和 Φ 都是随机向量, 且对所有在定义域中的 θ 有

$$[X \mid \Theta = \theta] \leq_{sm} [Y \mid \Theta = \theta]$$

则 $X \leq_{sm} Y$ 。

定理 3 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 为随机向量, $X \leq_{sm} Y, Z$ 为另一 m 维随机向量, 独立于 X, Y , 则

$$(h_1(X_1, Z), h_2(X_2, Z), \cdots, h_n(X_n, Z)) \leq_{sm} (h_1(Y_1, Z), h_2(Y_2, Z), \cdots, h_n(Y_n, Z))$$

其中, $h_i(X, Z), i = 1, 2, \cdots, n$ 为任意对给定的 Z , 关于 x 单调的函数。

证明 由定理 2 (1) 和 (3) 直接得到。

推论 1 X, Y 是 n 维随机向量, Z 是独立于 X 和 Y 的 n 维随机向量, 如果 $X \leq_{sm} Y$, 那么 $X + Z \leq_{sm} Y + Z$ 。

命题 1 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 是一相互独立的 n 维随机向量序列, $X_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \cdots, X_{i,n})$ 。引入另一随机序列 $X_i = X_{i,1}, X_{i,2}, \cdots, X_{i,n}, i = 1, 2, \cdots$ 使得 X_i 独立于 X_j 且对任意 $i, j = 1, 2, \cdots, X_i \leq_{st} X_j$, 如果对任意 $i = 1, 2, \cdots$ 有 $X_i \leq_{sm} X_i$, 则

$$(1) \sum_{i=1}^N X_i \leq_{sm} \sum_{i=1}^N X_i; N = 1, 2, \cdots$$

(2) 给定 N , 令 $I_j \subseteq \{1, 2, \cdots, N\}, j = 1, 2, \cdots, n, \text{Card}(I_j) = N_j$ 。为了简单起见作如下记号:

$$X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)} = \left(\sum_{k \in I_1} X_{k,1}, \sum_{k \in I_2} X_{k,2}, \cdots, \sum_{k \in I_n} X_{k,n} \right)$$
$$X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)} = \left(\sum_{k \in I_1} X_{k,1}, \sum_{k \in I_2} X_{k,2}, \cdots, \sum_{k \in I_n} X_{k,n} \right)$$

则

$$X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)} \leq_{sm} X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)} \quad (2)$$

(3) 当 N 和 $N_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 都为随机变量时, 不等式 (2) 仍然成立。

证明 (1) 使用数学归纳法。当 $N = 1$, 显然成立, 现在假定当 $N = k$ 时成立, 即

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq_{sm} X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

则由推论 1 可得

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k + X_{k+1} \leq_{sm} X_1 + X_2 + \cdots + X_k + X_{k+1}$$
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k + X_{k+1} \leq_{sm} X_1 + X_2 + \cdots + X_k + X_{k+1}$$

(2) 根据 k 值把 $X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)}$ 和 $X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)}$ 分别分成 N 个 n 维随机向量 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_N$ 及 $Z_1, Z_2, \cdots,$

Z_N 之和。也就是说把具有相同下标 k 的元素放入相同的随机向量中。例如: 对 $N = n = 3$ 的情形, 如果

$$X_{(I_1, I_2, I_3)} =$$

$$(X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1}, X_{2,2} + X_{3,2}, X_{1,3} + X_{3,3})$$

则应该把它分成

$$Z_1 = (X_{1,1}, 0, X_{1,3}), Z_2 = (X_{2,1}, X_{2,2}, 0)$$

和

$$Z_3 = (X_{3,1}, X_{3,2}, X_{3,3})$$

之和, 即 $X_{(I_1, I_2, I_3)} = Z_1 + Z_2 + Z_3$ 。

从而由定理 2 的结论 (1) 有 $Z_i \leq_{sm} Z_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 。(因为 $f(x) = 0, g(x) = x$ 都是单调函数) 再由本命题 (1) 则很容易得证;

(3) 令

$$X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)} =$$

$$\left(\sum_{k \in I_1} X_{k,1}, \sum_{k \in I_2} X_{k,2}, \cdots, \sum_{k \in I_n} X_{k,n} \right)$$

其中, $\text{Card}(I_i) = N_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是随机变量。则对任意的超模函数 $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 有

$$E[\phi(X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)})] =$$

$$E[E[\cdots E[E\phi(X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)}) \mid N_n] \cdots \mid N_2] \mid N_1] \leq$$

$$E[E[\cdots E[E\phi(X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)}) \mid N_n] \cdots \mid N_2] \mid N_1] =$$

$$E[\phi(X_{(I_1, I_2, \cdots, I_n)})]$$

其中的不等式由 (2) 式保证。

2 随机变量的正相关性

首先给出正相关性的一个定义。

定义 4 如果 n 维随机向量

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

满足: 对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$ 和 $x_j \geq y_j, j = 1, 2, \cdots, i - 1$, 有

$$[X_i \mid X_1 = x_1, \cdots, X_{i-1} = x_{i-1}] \geq_{st}$$

$$[X_i \mid X_1 = y_1, \cdots, X_{i-1} = y_{i-1}]$$

则称 X 是条件序列递增的(CIS)。

我们知道超模序能刻画正相关性, 而下面定理正是说明这一点。

定理 4 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是条件序列递增的随机向量,

$$Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$$

其中 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是相互独立的随机变量, 且 $X_i \leq_{st} Y_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $X \geq_{sm} Y$ 。

3 有正相关到达的离散时间排队系统的随机比较
3.1 一般正相关到达 这一节讨论超模序在离散时间排队系统分析中的应用。在离散时间排队系统中, 时间划分成固定长度的区间称为时隙(slots)。假定缓冲器容量无限, 服务器有恒定的服务率, 每个

时隙服务完 c 个顾客。 $\{A_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 是时隙 n 中到达的顾客数, 为一服从概率密度 $P(A_n = k) = p_k$ 的随机变量。 $\{Q_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 是在时隙 n 边界缓存器中的队长, 则有:

$$Q_0 = q_0$$
$$Q_{n+1} = [Q_n + A_n - c]^+ \quad n = 0, 1, \cdots,$$

其中, q_0 为系统的初始状态。下面给出队长单调性的定理, 证明可参见文[5]。

定理 5 $\{A_n^1, n = 0, 1, \cdots\}$ 和 $\{A_n^2, n = 0, 1, \cdots\}$ 为 2 个单服务员的离散时间排队系统的输入过程。如果

$\{A_n^1, n = 0, 1, \cdots\} \leq_{sm} \{A_n^2, n = 0, 1, \cdots\}$
则相应的队长过程 $\{Q_n^1, n = 0, 1, \cdots\}$ 和 $\{Q_n^2, n = 0, 1, \cdots\}$ 依递增凸序是有序的, 即给定初始状态 $Q_0^1 = Q_0^2 = q_0$, 则对 $n = 1, 2, \cdots$ 有 $Q_n^1 \leq_{icx} Q_n^2$ 。如果 $E[A_0^i] < c, i = 1, 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^i = Q^i$ 且 $Q^1 \leq_{icx} Q^2$ 。

3.2 Bernoulli 相关到达 同样考虑一个离散时间排队系统, 缓存器容量无限, 到达过程是 Bernoulli 相关的, 即存在 2 个参数, $\alpha = P\{\text{在一个时隙中有一个顾客到达} \mid \text{在前一个时隙有一个顾客到达}\}$, 和 $\beta = P\{\text{在一个时隙中没有顾客到达} \mid \text{在前一个时隙没有顾客到达}\}$ 来刻画到达过程。

令 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为第 n 个时隙中到达的顾客数, 则在稳态情形下, 在任意时隙中有一个顾客到达的概率为 $P\{A = 1\} = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$ 。显然, 到达是相关的, 但却不一定是正相关。下面给出 Bernoulli 到达正相关的条件:

命题 2 有 2 个参数 α 和 β 的 Bernoulli 相关到达过程, 如果 $\alpha + \beta > 1, \alpha, \beta \in (0, 1)$, 则 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是条件序列递增的 (CIS)。

证明 由条件序列递增的定义可直接得到。

综合定理 5 和命题 2 有

命题 3 $\{Q_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为有 Bernoulli 相关到达的离散时间排队系统的队长, $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是一取值于 $\{0, 1\}$ 的相互独立同分布的随机变量序列, 概率密度函数为 $P\{A_n = 1\} = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$,

$P\{A_n = 0\} = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, n = 1, 2, \cdots$, 相应地以 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为到达过程的队长为 $\{Q_n, n = 1, 2, \cdots\}$, 则给定初始状态 $Q_0 = Q_0 = q_0$ 且 $\alpha + \beta > 1, \alpha, \beta \in (0, 1)$, 有 $Q_n \leq_{icx} Q_n (n = 0, 1, \cdots)$, 当 2 个系统都满足稳态条件, 则进一步有 $Q \leq_{icx} Q$ 。其中,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q, \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q。$$

3.3 消息长度相关的 N 源消息到达 考虑一个有 N 个源的离散时间排队系统, 缓冲器容量是无限的。一个消息包含多个数据包, 这里把数据包看成顾客。一个源在一个时隙以概率 p 产生一个消息, 以概率 $q (q = 1 - p)$ 不产生。消息长度指的是消息所包含的数据包的数目。消息长度都服从概率密度函数 $m(n) = P\{\text{一个消息中含有 } n \text{ 个数据包}\}, n \geq 1$, 记 $X_i^k (k = 1, 2, \cdots, N)$ 为第 k 个源第 i 次产生的消息的长度。本文假定同一个源产生的消息的长度是条件序列递增的, 而不同源产生的消息长度是相互独立的。也就是说, 对任意 n 和 $k = 1, 2, \cdots, N$, $(X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k)$ 是 CIS, 但是对 $k_1 \neq k_2, i, j = 1, 2, \cdots, X_{i_1}^{k_1}, X_{j_2}^{k_2}$ 是相互独立。这种模型在高速通信网中有大量的应用背景。令 I_n 表示在第 n 个时隙中产生了消息的源的序号集合, 则 $I_n \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 且 $\text{Card}(I_n) = N_n, N_n$ 是一随机变量, 服从概率密度函数 $P\{N_n = j\} = C_N^j p^j q^{N-j} = b(N, p) (n = 1, 2, \cdots)$ 。从而 $A_n = \sum_{k \in I_n} X_{j_n}^k$, 其中 j_n 表示在第 n 时隙, 第 k 个源产生的消息的序号。则从定理 2 结论 (2) 和命题 1 结论 (3) 得到如下结果。

命题 4 在一个有消息长度相关的 N 源消息到达的离散时间排队系统(如上面所描述的)中, 用 $\{Q_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 表示第 n 时隙的队长。再考虑一个消息长度是相互独立的、其它都不变的离散时间排队系统, 用 $\{Q_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 表示相应的队长序列。则给定初始状态 $Q_0 = Q_0 = q_0$, 有 $Q_n \leq_{icx} Q_n, n = 0, 1, \cdots$ 。当 2 个系统都满足稳态条件时, 则进一步有 $Q \leq_{icx} Q$, 其中, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q, \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$ 。

参考文献:

[1] JOE H. Multivariate concordance[J]. J Multivariate Anal, 1990, 35: 12—30.
[2] MOSHE S, SHANTHIKUMAR J G. Supermodular stochastic orders and positive dependence of random vectors[J]. J Multivariate Analysis, 1997, 61: 86—101.
[3] MEESTER L E, SHANTHIKUMAR J G. Regularity of stochastic processes: A theory based on direction convexity [J]. Probab Eng Inform Sci, 1993, 7: 343—360.
[4] MÜLLER A, SCARSINI M. Some remarks on the supermodular order[J]. J Multivariate Analysis, 2000, 73: 107—119.
[5] BÄUERLE N. Monotonicity results for MR/GI/1 queues[J]. J Applied Probability, 1997, 34: 514—524.

(下转第 177 页)

Model Correction Methods in Mode Analysis for an Electronic Gun

LIU Shou gui¹, YANG Xu gui¹, HE Xiao qi², SONG Fang fang²

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China

2. CEPREI, Guangzhou 510000, China)

Abstract: In structural dynamic analysis, it is very important to build a FEM computational model with most possibly precise dynamic characteristics, such as natural frequencies and modes. That has significant effect on the numerical results of further transcend analysis, harmonic analysis and spectrum analysis. The methods of model correction in Mode Analysis for structural system are discussed in the example of an electronic gun component. The reasonable results of frequency and mode of the component is obtained with these methods.

Key words: model updating; mode analysis; electronic gun

(上接第 168 页)

Supermodular Order and Its Application in Discrete time Queue

ZHOU Wen hui¹, DENG Yong lu²

(1. School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. Department of Statistics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The supermodular order is introduced and it is shown that the supermodular order can compare the strength of the positive dependence of random vectors. And then the discrete time with positive dependent arrival is analysed by using the supermodular order and concerned stochastic order. The result is obtained that the buffer contents are ordered under increasing convex order, when arrival processes are ordered under supermodular order. Finally, the result is applied to some special discrete time queues such as Bernoulli correlated arrival and N -source arrival with correlated messages.

Key words: supermodular order; positive correlation; discrete time queue