

Mann 迭代和 Ishikawa 迭代收敛的等价*

黎永锦

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘要: 在任意的实 Banach 空间中, 在 $\sup \beta_n < k/[L(1+L)]$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \alpha_n \rightarrow 0$ 的条件下, 讨论了 Lipschitz 强伪压缩算子的 Mann 迭代和 Ishikawa 迭代收敛等价的问题, 推广了目前已知的结果。

关键词: 强伪压缩算子; 非线性方程; Mann 迭代; Ishikawa 迭代

中图分类号: O117.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 01-0005-03

1 引言和定义

设 E 是任意的实 Banach 空间, E^* 为 E 的对偶空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 E^* 与 E 之间的对偶, 正规对偶映射 $J: E \rightarrow 2^{E^*}$ 定义为:

$$Jx = \{f \in E^* : \langle x, f \rangle = \|x\|, \|f\| = \|x\|\}$$

设 E 是一个实 Banach 空间, $T: D(T) \rightarrow E$ 称为强伪压缩(伪压缩)的^[1], 如果对所有的 $x, y \in D(T)$ 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 和 $t > 1 (t=1)$, 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \leq \frac{1}{t} \|x-y\|^2 \quad (1)$$

若令 $k = (t-1)/t$, 则 T 是强伪压缩当且仅当下面不等式成立。

$$\langle (I - T - kI)x - (I - T - kI)y, j(x-y) \rangle \geq 0 \quad (2)$$

现在, 回忆 Mann 迭代和 Ishikawa 迭代序列。给定 Banach 空间 E , Mann 迭代^[2] 定义为

$$x_0 \in E, x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n, n \geq 0 \quad (3)$$

Ishikawa 迭代^[3] 定义为:

$$\begin{aligned} u_0 \in E, u_{n+1} &= (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Tv_n \\ v_n &= (1 - \beta_n)u_n + \beta_n Tu_n, n \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$0 \leq \alpha_n, \beta_n \leq 1, \forall n \geq 0$$

Ishikawa 具误差的迭代^[4] 定义为

$$\begin{aligned} u_0 \in E, u_{n+1} &= (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Tv_n + q_n \\ v_n &= (1 - \beta_n)u_n + \beta_n Tu_n + r_n, n \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

引理^[5] 设 α_n 是非负序列, 满足

$$\alpha_{n+1} \leq (1 - t_n)\alpha_n + b_n + c_n$$

这里, $t_n \in (0, 1), \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty, b_n = o(t_n), \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$, 则一定有 $\lim \alpha_n = 0$ 。

在过去的二十多年, Chidume^[1,6-8] 和许多作者^[3,4] 在 (q) 一致光滑, 一致光滑、光滑 Banach 空间等, 得到了具误差的 Mann 和 Ishikawa 迭代序列在适当的条件下, 强收敛到方程 $Tx = f$ 的解, 但在一般情况下, Mann 迭代与 Ishikawa 迭代的收敛性是不等价的。本文将讨论强伪压缩算子的 Mann 迭代与 Ishikawa 迭代收敛性的等价问题, 所得结果改进了 Rhoades^[9] 的结果。

2 主要结果和证明

现在, 给出并证明下面的定理。

定理 1 设 E 是任意的实 Banach 空间, $T: E \rightarrow E$ 是 Lipschitz 强伪压缩算子 (不妨设 $L \geq 1$), $x_0 = u_0 \in E, x_n$ 和 u_n, v_n 如(3),(4) 式所定义, 非负实数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$(1) \sup \beta_n < k/[L(1+L)]$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \alpha_n \rightarrow 0$$

则对 T 的任意不动点 x^* , 下面的命题等价:

- (a) Mann 迭代强收敛于不动点 x^* ;
- (b) Ishikawa 迭代强收敛于不动点 x^* 。

证明 既然 T 是 Lipschitz 强伪压缩算子, 由文 [10] 可知 T 有不动点 x^* 。容易看出若 (b) 成立, 只须令 $\beta_n = 0$, 则 (a) 成立。

下面证明 (a) 蕴涵 (b), 由式(3)和式(4), 有

$$\begin{aligned} \|u_n - x_n\| &= \\ \|u_{n+1} + \alpha_n u_n - \alpha_n Tv_n - x_{n+1} - \alpha_n x_n + \alpha_n Tx_n\| &= \end{aligned}$$

* 收稿日期: 2003-06-04

作者简介: 黎永锦 (1963 年生), 男, 副教授; E-mail: stsljy@zsu.edu.cn

$$\begin{aligned} & \| (1 + \alpha_n)(u_{n+1} - x_{n+1}) + \\ & \alpha_n [(I - T - kI)u_{n+1} - (I - T - kI)x_{n+1}] - \\ & (1 - k)\alpha_n(u_n - x_n) + \\ & (2 - k)\alpha_n^2(u_n - Tv_n - x_n + Tx_n) + \\ & \alpha_n(Tu_{n+1} - Tv_n - Tx_{n+1} + Tx_n) \| \end{aligned} \quad (6)$$

由于

$$\langle (I - T - kI)x - (I - T - kI)y, j(x - y) \rangle \geq 0 \quad (7)$$

因此, 由 Kato^[4]可知

$$\begin{aligned} & \| x - y \| \leq \\ & \| x - y + r[(I - T - kI)x - (I - T - kI)y] \| \\ & \text{对所有的 } x, y \in E \text{ 和 } r < 0 \text{ 成立。故} \\ & \| u_n - x_n \| \geq (1 + \alpha_n) \| (u_{n+1} - x_{n+1}) + \\ & \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n} [(I - T - kI)u_{n+1} - (I - T - kI)x_{n+1}] \| - \\ & (1 - k)\alpha_n \| u_n - x_n \| + \\ & (2 - k)\alpha_n^2 \| u_n - Tv_n - x_n + Tx_n \| - \\ & \alpha_n \| Tu_{n+1} - Tv_n - Tx_{n+1} + Tx_n \| = \\ & (1 + \alpha_n) \| u_{n+1} - x_{n+1} \| - \\ & (1 - k)\alpha_n \| u_n - x_n \| + \\ & (2 - k)\alpha_n^2 \| u_n - Tv_n - x_n + Tx_n \| - \\ & \alpha_n \| Tu_{n+1} - Tv_n - Tx_{n+1} + Tx_n \| \end{aligned} \quad (8)$$

因此

$$\begin{aligned} & \| u_{n+1} - x_{n+1} \| \leq \left[\frac{1 + (1 - k)\alpha_n}{1 + \alpha_n} \right] \| u_n - x_n \| + \\ & \frac{(2 - k)\alpha_n^2}{1 + \alpha_n} \| u_n - Tv_n - x_n + Tx_n \| + \\ & \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n} \| Tu_{n+1} - Tv_n - Tx_{n+1} + Tx_n \| \leq \\ & \left[\frac{1 + (1 - k)\alpha_n}{1 + \alpha_n} \right] \| u_n - x_n \| + \\ & (2 - k)\alpha_n^2 \| u_n - Tv_n \| + \\ & (2 - k)\alpha_n^2 \| Tx_n - x_n \| + \\ & \alpha_n \| Tu_{n+1} - Tv_n \| + \alpha_n \| Tx_{n+1} - Tx_n \| \end{aligned} \quad (9)$$

既然

$$\begin{aligned} & \| Tx_n - Tv_n \| \leq L \| x_n - v_n \| \\ & \| v_n - x_n \| = \| (1 - \beta_n)u_n + \beta_n Tu_n - x_n \| \leq \\ & (1 - \beta_n + \beta_n L) \| u_n - x_n \| + \beta_n \| Tx_n - x_n \| \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} & \| u_n - Tv_n \| \leq \| u_n - x_n \| + \\ & \| x_n - Tx_n \| + \| Tx_n - Tv_n \| \leq \\ & (1 + L^2) \| u_n - x_n \| + \\ & (1 + L\beta_n) \| Tx_n - x_n \| \| Tu_{n+1} - Tv_n \| \leq \\ & L \| u_{n+1} - v_n \| \leq \\ & L[(1 - \alpha_n) \| u_n - v_n \| + \alpha_n \| Tv_n - v_n \|] \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \| Tv_n - v_n \| \leq \| Tv_n - Tx_n \| + \\ & \| Tx_n - x_n \| + \| x_n - v_n \| \leq \\ & (1 + L)L \| u_n - x_n \| + \\ & [(1 + L)\beta_n + 1] \| Tx_n - x_n \| \\ & \| u_n - v_n \| = \| u_n - (1 - \beta_n)u_n - \beta_n Tu_n \| \leq \\ & \beta_n [(1 + L) \| x_n - u_n \| + \| x_n - Tx_n \|] \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \| Tu_{n+1} - Tv_n \| \leq \\ & L(1 - \alpha_n)[\beta_n(1 + L) \| u_n - x_n \| + \\ & \beta_n \| Tx_n - x_n \|] + \alpha_n L[(1 + L)L \| x_n - u_n \| + \\ & [(1 + L)\beta_n + 1] \| Tx_n - x_n \|] \leq \\ & [L(1 - \alpha_n)\beta_n(1 + L) + \alpha_n L^2(1 + L)] \| x_n - u_n \| + \\ & \{\beta_n L(1 - \alpha_n) + \alpha_n L[(1 + L)\beta_n + 1]\} \| x_n - Tx_n \| \end{aligned}$$

由 (9) 式可知

$$\begin{aligned} & \| u_{n+1} - x_{n+1} \| \leq \\ & [1 + (1 - k)\alpha_n](1 - \alpha_n + \alpha_n^2) \| u_n - x_n \| + \\ & (2 - k)\alpha_n^2[(1 + L^2) \| u_n - x_n \| + \\ & (1 + L\beta_n) \| Tx_n - x_n \|] + \\ & (2 - k)\alpha_n^2 \| Tx_n - x_n \| + \\ & \alpha_n [L(1 - \alpha_n)\beta_n(1 + L) + \alpha_n L^2(1 + L)] \cdot \\ & \| x_n - u_n \| + \\ & \alpha_n \{\beta_n L(1 - \alpha_n) + \alpha_n L[(1 + L)\beta_n + 1]\} \cdot \\ & \| x_n - Tx_n \| + \alpha_n L \| Tx_{n+1} - Tx_n \| \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} & \lambda_n = \alpha_n [(2 - k)\alpha_n(2 + L\beta_n) + \\ & [\beta_n L(1 - \alpha_n) + \alpha_n L[(1 + L)\beta_n + 1]]] \\ & \eta_n = [1 + (1 - k)\alpha_n](1 - \alpha_n + \alpha_n^2) + \\ & (2 - k)(1 + L^2)\alpha_n^2 + \\ & \alpha_n L(1 + L)[\beta_n(1 - \alpha_n) + L\alpha_n] \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & \eta_n \leq 1 - k\alpha_n + \alpha_n^2 + (2 - k)(1 + L^2)\alpha_n^2 + \\ & \alpha_n L(1 + L)[\beta_n(1 - \alpha_n) + L\alpha_n] = \\ & 1 - k\alpha_n + \alpha_n^2 [1 + (2 - k)(1 + L^2) + \\ & L^2(1 + L)] + L(1 + L)(1 - \alpha_n)\alpha_n\beta_n \end{aligned}$$

有 $M = 1 + (2 - k)(1 + L^2) + L^2(1 + L) > 0$ 使得

$$\eta_n \leq 1 - k\alpha_n + M\alpha_n^2 + L(1 + 1)\alpha_n\beta_n$$

既然

$$\sup \beta_n < \beta < k/L(1 + L), \alpha \rightarrow 0$$

可知, 存在 $N > 0$ 使得对所有的 $n > N$, 有

$$k - M\alpha_n - L(1 + L)\beta_n > \tau > 0$$

$$\begin{aligned} & \text{故 } \| x_{n+1} - u_{n+1} \| \leq (1 - \tau\alpha_n) \| x_n - u_n \| + \\ & \lambda_n \| x_n - Tx_n \| + \alpha_n L \| x_{n+1} - x_n \| \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} t_n &= \tau \alpha_n \\ b_n &= \lambda_n \|x_n - Tx_n\| + \alpha_n L \|x_{n+1} - x_n\| \\ c_n &= 0 \\ \alpha_n &= \|x_n - u_n\| \end{aligned}$$

有

$$a_{n+1} \leq (1 - t_n) a_n + b_n + c_n$$

由 $\lim x_n = x^*$ 和 T 连续可知 $\lim Tx_n = Tx^* = x^*$, 从而有 $\lim \|Tx_n - x_n\| \rightarrow 0$ 和 $\lim \|x_{n+1} - x_n\| = 0$, 因此 $b_n \rightarrow 0$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty, b_n = 0(t_n), \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$

因而, 由引理 1, 有 $\lim \alpha_n = \lim \|x_n - u_n\| = 0$, 这就证明了定理 1 成立。

用类似于上面的方法, 不难证明下面定理成立。

定理 2 设 E 是任意的实 Banach 空间, $T: E \rightarrow E$ 是 Lipschitz 强伪压缩算子 (不妨设 $L \geq 1$), $x_0 = u_0 \in E, x_n$ 和 u_n, v_n 如 (3)(4) 式所定义, 非负实数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$\textcircled{1} \sup \beta_n < k/L(1 + L);$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \alpha_n \rightarrow 0$$

则对 T 的任意不动点 x^* , 下面的命题等价:

① Mann 迭代强收敛于不动点 x^* ;

② Ishikawa 具误差的迭代强收敛于不动点 x^* 。

参考文献:

- [1] CHIDUME C E, OSILIKE M O. Nonlinear accretive and pseudo-contractive equations in Banach spaces [J]. Nonlinear Analysis, 1998, 31: 779 - 789.
- [2] MANN W R. Mean value methods in iteration [J]. Proc Amer Math Soc, 1953, 4: 506 - 510.
- [3] ISHIKAWA S. Fixed points by a new iteration method [J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 44: 147 - 150.
- [4] KATO T. Nonlinear semi-groups and evolutions equations [J]. J Math Soc Japan, 1964, 19: 508 - 520.
- [5] MARTIN R H, Jr. A global existence theorem for autonomous differential equations in Banach space [J]. Proc Amer Math Soc, 1970, 26: 307 - 314.
- [6] CHIDUME C E, MUTANGADURA S A. An example of the Mann iteration Lipschitz pseudocontractions [J]. Proc Amer Math Soc, 2001, 129: 2359 - 2363.
- [7] CHIDUME C E. Global iterative schemes for strongly pseudo-contractive maps [J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126: 2641 - 2649.
- [8] CHIDUME C E, ZEGEYE H. Iterative solution of $0 \in Ax$ for an m -accretive operator certain Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 2002, 269: 421 - 430.
- [9] RHOADES B E, SOLTUZ S M. On the equivalence of Mann and Ishikawa iteration methods [J]. Int J Math Math Sci, 2003, 7: 451 - 459.
- [10] CHIDUME C E, OSILIKE M O. Iterative solutions of nonlinear accretive operator in arbitrary Banach spaces [J]. Nonlinear Analysis, 1999, 36: 863 - 872.

The Equivalence of Mann and Ishikawa Iteration Methods in Banach Space

LI Yong-jin

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Let E be an arbitrary real Banach space, and $T: E \rightarrow E$ be a Lipschitzian strongly pseudocontractive operator, under the condition $\sup \beta < k/L(1 + L)$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \alpha_n \rightarrow 0$, it is shown that certain Mann and Ishikawa iterative schemes are equivalent.

Key words: strongly pseudocontractive operator; nonlinear equation; Mann iterative; Ishikawa iterative