

序区间 Descartes 集上二元 ϕ -凹混合单调算子 不动点存在惟一性^{*}

许绍元

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究了序区间 Descartes 集上混合单调算子, 引入二元 ϕ -凹 ($-\phi$)-凸性后, 利用半序方法和单调迭代技巧, 得到了算子的不动点存在惟一性与迭代收敛性, 进而得到了混合单调算子的若干新不动点定理, 改进和推广了混合单调算子某些相应结果。

关键词: 锥与半序; 二元 ϕ -凹 ($-\phi$)-凸) 算子; 混合单调算子; 不动点

中图分类号: O177.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 02-0005-04

1 引言与记号

混合单调算子是一类十分重要的非线性算子, 广泛存在于非线性微分方程和积分方程的研究中。设 E 是半序 Banach 空间, $D \subset E$, $A: D \times D \rightarrow E$ 是混合单调算子。从现有的文献来看, 研究混合单调算子一般分为两种情况, 一种是其定义域 $D \times D$ 为序区间的 Descartes 集 (此时 D 为序区间); 另一种是其定义域 $D \times D$ 为凸锥的 Descartes 集 (此时 D 为凸锥)。前者常常用到算子的某种紧性^[1], 但紧性往往不易验证, 而后者一般考虑算子的某种凹凸性^[2-9], 但也有不足之处, 因为凸锥的范围往往比序区间的范围大得多, 这就为验证算子的某种凹凸性带来不便。文[7] 将文[8] 中的算子 (其定义域为 P_h) 限制在序区间上讨论, 引入序区间上一元 ϕ -凹 (凸) 算子, 得到了不动点的存在惟一性。本文沿续这一思想, 把具有二元 ϕ -凹 ($-\phi$)-凸性的混合单调算子限制在序区间的 Descartes 集上, 即讨论序区间 Descartes 集上二元 ϕ -凹 ($-\phi$)-凸混合单调算子, 同样得到了不动点的存在惟一性与迭代收敛性, 进而得到了一类混合单调算子的若干新不动点定理, 改进和推广了混合单调算子某些相应结果, 其证明技巧与有关文献也有不同。

设 E 是实 Banach 空间, θ 是 E 的零元, P 是 E 中的锥, $\leq$ 是由锥 P 导出的半序, 即对任意 $x, y \in E$, $x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in P$ 。关于锥与半序的理论见文[9]。设 $D \subset E$, 若算子 $A(x, y): D \times D \rightarrow E$ 关于 x 是增的, 关于 y 是减的, 则称 A 为混合单调的^[9]。

若存在 $x \in D$, 使 $A(x, x) = x$, 则称 x 为 A 在 D 中的不动点。设 $u_0, v_0 \in E$ 且 $u_0 \leq v_0$, 称 $[u_0, v_0] = \{x \in E \mid u_0 \leq x \leq v_0\}$ 为序区间。

定义 1 设 $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是一个算子, 若存在函数 $\phi: (0, 1] \times [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow (0, 1]$ 满足对任意 $0 < t < 1$ 以及 $u_0 \leq y \leq x \leq v_0$ 有 $\phi(t, x, y) > t$, 使得

$$A(tx, t^{-1}y) \geq \phi(t, x, y)A(x, y), \\ \forall t \in (0, 1), u_0 \leq y \leq x \leq v_0 \quad (1)$$

则称 A 为序区间 Descartes 集上二元 ϕ -凹算子。

定义 2 设 $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是一个算子, 若存在函数 $\phi: (0, 1] \times [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow (0, 1]$ 满足对任意 $0 < t < 1$ 以及 $u_0 \leq x \leq y \leq v_0$ 有 $\phi(t, x, y) > t$, 使得

$$A(t^{-1}x, y) \leq \frac{1}{\phi(t, x, y)}A(x, y), \\ \forall t \in (0, 1), u_0 \leq x \leq y \leq v_0 \quad (2)$$

则称 A 为序区间 Descartes 集上二元 ($-\phi$)-凸算子。

注 1 定义 1 与定义 2 中序区间上二元 ϕ -凹 ($-\phi$)-凸) 算子不同于文[4] 中的二元 ϕ -凹 ($-\phi$)-凸) 算子, 前者算子 A 的定义域的范围比后者更小, 因此在验证其 ϕ -凹 ($-\phi$)-凸) 性时更容易操作。

注 2 (1) 式是文[5] 中 (1.1) 式的推广, 故序区间 Descartes 集上二元 ϕ -凹算子是文[5] 中

* 收稿日期: 2003-06-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10171116); 广东省自然科学基金资助项目 (011221); 安徽省教育厅重点科研资助项目 (2003kj047zd)

作者简介: 许绍元 (1964 年生), 男, 淮北煤炭师范学院副教授; E-mail: xushaoyuan@etang.com

锥上凹凸映射的推广。

2 主要结果

定理1 设 P 是正规锥, $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是二元 ϕ -凹混合单调算子, 且满足条件(1)。若还满足

① 存在 $r_0 > 0$, 使得 $u_0 \geq r_0 v_0$;

② $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$;

③ 存在 $w_0, z_0 \in [u_0, v_0]$, 且 $w_0 \geq z_0$ 使得对任意 $0 < t < 1$ 以及 $u_0 \leq y \leq x \leq v_0$ 有 $\phi(t, x, y) \geq \phi(t, w_0, z_0)$;

④ 对任意 $0 < t < 1$ 以及任意 $x, y \in [u_0, v_0]$ 有 $\lim_{s \rightarrow t^-} \phi(s, x, y) > t$

则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有惟一不动点 x^* , 且 $\forall x_0, y_0 \in [u_0, v_0]$ 序列

$$\begin{aligned} u_n &= A(u_{n-1}, v_{n-1}), v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}), \\ x_n &= A(x_{n-1}, y_{n-1}), y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

都有 $u_n \rightarrow x^*, v_n \rightarrow x^*, x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$

证明 先证不动点存在性与迭代收敛性。由 A 的混合单调性以及②和(3)有

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0 \quad (4)$$

以及

$$u_n \leq x_n \leq v_n, u_n \leq y_n \leq v_n \quad (5)$$

又由①有 $0 < r_0 < 1$ 。根据①和 A 的二元 ϕ -凹混合单调性有

$$\begin{aligned} u_1 &= A(u_0, v_0) \geq A\left(r_0 v_0, \frac{1}{r_0} u_0\right) \geq \\ &\phi(r_0, v_0, u_0) A(v_0, u_0) = r_1 v_1 \end{aligned}$$

由归纳法知

$$u_n \geq r_n v_n, n = 1, 2, \dots$$

其中, $r_n = \phi(r_{n-1}, v_{n-1}, u_{n-1}) > r_{n-1}, 0 < r_n \leq 1$ 。显然 $\{r_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r \in (0, 1]$, 则 $r = 1$ 。事实上, 假若 $0 < r < 1$, 由③有

$$r_n \geq \phi(r_{n-1}, v_{n-1}, u_{n-1}) \geq \phi(r_{n-1}, w_0, z_0) \quad (6)$$

在(6)式中令 $n \rightarrow \infty$, 并结合④有

$$r \geq \lim_{s \rightarrow r^-} \phi(s, w_0, z_0) > r$$

矛盾。故 $r = 1$ 。于是 $\forall n, p \geq 1$ 有

$$\theta \leq v_n - u_n \leq v_n - r_n v_n =$$

$$(1 - r_n) v_n \leq (1 - r_n) v_0,$$

$$\theta \leq u_{n+p} - u_n \leq v_n - u_n,$$

$$\theta \leq v_n - v_{n+p} \leq v_n - u_n$$

由 P 的正规性易见

$$v_n - u_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

故 $\{u_n\}, \{v_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 列, 因此,

$$\exists u^*, v^* \in E$$

使 $u_n \rightarrow u^*, v_n \rightarrow v^* (n \rightarrow \infty)$

且

$$u^* = v^*$$

记 $x^* = u^* = v^*$, 在(5)式中令 $n \rightarrow \infty$ 时得

$$x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

且

$$u_n \leq x^* \leq v_n (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{下证 } A(x^*, x^*) = x^*$$

一方面,

$$A(x^*, x^*) \geq A(u_n, v_n) = u_{n+1} \rightarrow x^*$$

从而

$$A(x^*, x^*) \geq x^*$$

另一方面,

$$A(x^*, x^*) \leq A(v_n, u_n) = v_{n+1} \rightarrow x^*$$

从而

$$A(x^*, x^*) \leq x^*$$

故

$$A(x^*, x^*) = x^*$$

即 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有不动点。

再证不动点惟一性。若存在 $\bar{x} \in [u_0, v_0]$ 使 $A(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$, 由 A 的混合单调性有

$$A(u_0, v_0) \leq A(\bar{x}, \bar{x}) \leq A(v_0, u_0)$$

即 $u_1 \leq \bar{x} \leq v_1$ 。不难归纳出 $\forall n \geq 1$ 有, $u_n \leq \bar{x} \leq v_n$, 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $\bar{x} = x^*$ 。证毕。

类似地, 关于二元 $(-\phi)$ -凸混合单调算子, 也有相应的结论(证明仿定理1, 从略)。

定理2 设 P 是正规锥, $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是二元 $(-\phi)$ -凸混合单调算子, 且满足条件(2)。若还满足

① 存在 $r_0 > 0$, 使得 $u_0 \geq r_0 v_0$;

② $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$;

③ 存在 $w_0, z_0 \in [u_0, v_0]$, 且 $w_0 \leq z_0$ 使得对任意 $0 < t < 1$ 以及 $u_0 \leq x \leq y \leq v_0$ 有 $\phi(t, x, y) \geq \phi(t, w_0, z_0)$;

④ 对任意 $0 < t < 1$ 以及对任意 $x, y \in [u_0, v_0]$ 有 $\lim_{s \rightarrow t^-} \phi(s, x, y) > t$ 。

则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有惟一不动点 x^* , $\forall x_0 \in [u_0, v_0]$ 迭代序列(3)都有

$$u_n \rightarrow x^*, v_n \rightarrow x^*, x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

注3 将定理1或定理2中条件③和④改为“ $\phi(x, y)$ 关于 x 和 y 单调, 关于 t 左连续”而其它条件不变, 其结论仍成立。

仿定理1和定理2之证明, 有

定理3 设 P 是正规锥, $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是二元混合单调算子, 且满足(1)。若还满足

① 存在 $\epsilon_0 > 0$, 使 $A(u_0, v_0) \geq \epsilon_0 A(v_0, u_0)$;

② $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$;

③ 存在 $w_0, z_0 \in [u_0, v_0]$ 且 $w_0 \geq z_0$ 使 $0 < t < 1$ 及 $u_0 \leq y \leq x \leq v_0$ 有

$$\phi(t, x, y) \geq \phi(t, w_0, z_0);$$

④ $\forall 0 < t < 1$ 以及任意 $x, y \in [u_0, v_0]$ 有 $\lim_{s \rightarrow t^-} \phi(s, x, y) > t$

则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中存在惟一不动点, 且 $\forall x_0, y_0 \in [u_0, v_0]$, 迭代序列 (3) 都有

$$u_n \rightarrow x^*, v_n \rightarrow x^*, x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

定理4 设 P 是正规锥, $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是二元 $(-\phi)$ -凸混合单调算子且满足条件 (2). 若

① 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使 $A(u_0, v_0) \geq \varepsilon_0 A(v_0, u_0)$;

② $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$;

③ 存在 $w_0, z_0 \in [u_0, v_0]$ 且 $w_0 \leq z_0$ 使 $0 < t < 1$ 及 $u_0 \leq x \leq y \leq v_0$ 有

$$\phi(t, x, y) \geq \phi(t, w_0, z_0);$$

④ $\forall 0 < t < 1$ 以及任意 $x, y \in [u_0, v_0]$ 有 $\lim_{s \rightarrow t^-} \phi(s, x, y) > t$

则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中存在惟一不动点, 且 $\forall x_0, y_0 \in [u_0, v_0]$, 迭代序列 (3) 都有

$$u_n \rightarrow x^*, v_n \rightarrow x^*, x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

注4 定理1条件①即 $u_0 \geq r_0 v_0$, 这比文[4]定理1中条件 $A(u_0, v_0) \geq \varepsilon A(v_0, u_0)$ 在实际应用更易操作; 另一方面, 定理1与定理3中条件③比文[4]中条件 $[H_1]$ 要弱, 前者只考虑满足 $u_0 \leq y \leq x \leq v_0$ 的 x, y 而不必考虑 P 中任意 x, y . 因此, 定理1和定理3改进和推广了现有文献的有关结果.

由上述定理可导出若干具有某种凹凸性的混合单调算子的新不动点定理.

推论1 设 P 是正规锥, $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是混合单调算子, 若满足

① 存在 $r_0 > 0$, 使得 $u_0 \geq r_0 v_0$;

② $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$;

③ 存在常数 $0 < \beta < 1$ 使得

$$A(tx, t^{-1}y) \geq t^\beta A(x, y),$$

$$\forall u_0 \leq y \leq x \leq v_0, 0 < t < 1$$

则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有惟一不动点 x^* , 且 $\forall x_0, y_0 \in [u_0, v_0]$, 迭代序列 (3) 都有

$$u_n \rightarrow x^*, v_n \rightarrow x^*, x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

证明 只需验证 A 是序区间 Descartes 集上二元 ϕ -凹混合单调算子, 且满足定理1的条件. 事实上, 令

$$\phi(t, x, y) = t^\beta, x, y \in [u_0, v_0], 0 < t < 1$$

则 $\phi(t, x, y) > t$, 由③即知 ϕ 满足(1)式. 故 A 是

序区间 Descartes 集上二元 ϕ -凹混合单 ϕ 调算子, 再由①②和注3, 应用定理1即知推论1结论成立.

类似地, 利用定理1同样可以证明

推论2 设 P 是正规锥, $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是混合单调算子. 若满足

① 存在 $r_0 > 0$, 使得 $u_0 \geq r_0 v_0$;

② $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$;

③ 存在函数 $\eta = \eta(t, x, y) > 0$ 使得

$$A(tx, t^{-1}y) \geq t(1 + \eta)A(x, y),$$

$$\forall u_0 \leq y \leq x \leq v_0, 0 < t < 1$$

并且 $\eta = \eta(t, x, y)$ 关于 x 与 y 均单调, 关于 t 左连续. 则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有惟一不动点 x^* , 且 $\forall x_0, y_0 \in [u_0, v_0]$, 序列 (3) 都有

$$u_n \rightarrow x^*, v_n \rightarrow x^*, x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

注5 推论1比文[2]定理1的条件更弱, 因为前者并不要求 P 是体锥, 并且验证条件“ $A(tx, t^{-1}y) \geq t^\beta A(x, y)$ ”时, 只要求检验序区间 $[u_0, v_0]$

中满足条件“ $x \leq y$ ”的点即可, 而不要求在 $\dot{P}$ 中验证所有的点. 因此, 推论1推广和改进了文[2]中的定理1.

同样, 利用定理2有

推论3 设 P 是正规锥,

$$A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$$

是混合单调算子. 若满足

① 存在 $r_0 > 0$, 使得 $u_0 \geq r_0 v_0$;

② $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$;

③ 存在常数 $0 < \beta < 1$ 使得

$$A(t^{-1}x, ty) \leq t^\beta A(x, y),$$

$$\forall u_0 \leq x \leq y \leq v_0, 0 < t < 1$$

则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有惟一不动点 x^* , 且 $\forall x_0, y_0 \in [u_0, v_0]$, 序列 (3) 都有

$$u_n \rightarrow x^*, v_n \rightarrow x^*, x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

推论4 设 P 是正规锥, $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ 是混合单调算子. 若满足

① 存在 $r_0 > 0$, 使得 $u_0 \geq r_0 v_0$;

② $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$;

③ 存在函数 $\eta = \eta(t, x, y) > 0$ 使得

$$A(t^{-1}x, ty) \geq (t(1 + \eta))^{-1}A(x, y),$$

$$\forall u_0 \leq x \leq y \leq v_0, 0 < t < 1$$

并且 $\eta = \eta(t, x, y)$ 关于 x 与 y 均单调, 关于 t 左连续. 则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有惟一不动点 x^* , 且 $\forall x_0, y_0 \in [u_0, v_0]$, 序列 (3) 都有

$$u_n \rightarrow x^*, v_n \rightarrow x^*, x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

同样, 利用定理4有

推论 5 设 P 是正规锥, $A: P \rightarrow P$ 是混合单调算子. 若满足

① 存在 $v > 0$ 及 $c > 0$, 使得

$$\theta \leq A(v, \theta) \leq v, A(\theta, v) \geq cA(v, \theta);$$

② 存在函数 $\eta = \eta(t, x, y) > 0$, 使得

$$A(t^{-1}x, ty) \leq (t(1+\eta))^{-1}A(x, y),$$

$$\forall \theta \leq x \leq y \leq v_0, 0 < t < 1$$

并且 $\eta = \eta(t, x, y)$ 关于 x 与 y 均单调, 关于 t 左连续. 则算子 A 在 $[\theta, v]$ 中有唯一不动点 x^* , $\forall x_0, y_0 \in [\theta, v]$ 迭代序列 $x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1})$, $y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1})$ 都有

$$x_n \rightarrow x^*, y_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$$

注 6 与文 [3] 定理 2 相比, 推论 5 所要求的条件更弱, 对锥 P 只要求是正规锥而不要求是正规锥; 另外, 验证 A 的二元 $(-\phi)$ -凸性条件“ $A(t^{-1}x, ty) \leq (t(1+\eta))^{-1}A(x, y)$ ”时, 只要求点 x, y 属于锥 P 中的有界集 $[\theta, v]$ 而不要求点 x, y 属于锥 P 中的任何有界集, 我们同样得到了二元 $(-\phi)$ -凸混合单调算子的不动点的存在唯一性, 并且证明方法也不相同.

致谢: 衷心感谢周作领教授的悉心指导和热情帮助. 此外, 审稿者提出了十分宝贵的建议; 贾保国副教授与作

者进行了有益的讨论, 黄煜副教授给予了很大的鼓励, 在此一并致谢.

参考文献:

- [1] GUO D J, LAKSHMIKANTHAM V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications[J]. Nonlinear Analysis TMA. 1987, 11(5): 623—637.
- [2] GUO D J. Fixed points of mixed monotone operators with applications[J]. Appl Anal, 1988, 31: 215—224.
- [3] GUO D J. Existence and uniqueness of positive fixed points for mixed monotone operators and applications[J]. Appl Anal, 1992, 46: 91—100.
- [4] 张庆政. 一类非紧算子与不动点的存在唯一性[J]. 数学研究与评论, 1999, 19(3): 617—620.
- [5] 赵增勤. 半序线性空间混合单调映射不动点存在唯一性[J]. 系统科学与数学, 1994, 19(2): 217—224.
- [6] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用[J]. 数学学报, 1998, 41(6): 1121—1126.
- [7] 许绍元. 序区间上 ϕ -凹(凸)算子的不动点及其应用[J]. 工程数学学报, 1999, 16(4): 51—56.
- [8] 李福义, 梁展东. ϕ -凹(凸)算子的不动点定理及其应用[J]. 系统科学与数学, 1994, 14(4): 355—360.
- [9] GUO D J, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. New York: Academic Press Inc, 1988.

Existence and Uniqueness of the Fixed Point for Two variable Concave (convex) Mixed Monotone Operators on Descartes Set of Order Intervals

XU Shao yuan

(School of Mathematics and Computational Sciences, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A class of mixed monotone operators on Descartes set of order intervals are discussed. With the properties of ϕ -concave ($(-\phi)$ -convex), the existence and uniqueness of the fixed point for two variable ϕ -concave ($(-\phi)$ -convex) mixed monotone operators are obtained. Some relevant results of mixed monotone operators are improved and generalized.

Key words: cone and semi order; two variable ϕ -concave ($(-\phi)$ -convex) operator; mixed monotone operator; fixed point