

非线性弹性动力学 Hamilton 型变分原理的革新^{*}

——非传统 Hamilton 型变分原理

罗 恩, 姜凤华

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 根据古典阴阳互补和现代对偶互补的基本思想, 通过作者早已提出的一条简单而统一的新途径, 系统地建立了几何非线性弹性动力学的各类非传统 Hamilton 型变分原理。而这种非传统 Hamilton 型变分原理能反映几何非线性弹性动力学初值一边值问题的全部特征, 因此它是对 Hamilton 变分原理的重要革新。文中给出一个重要的积分关系式, 可以认为, 在力学上它是几何非线性动力学的广义虚功原理的表式。从该式出发, 不仅能得到几何非线性动力学的虚功原理, 而且通过所给出的一系列广义 Legendre 变换, 还能系统地导出几何非线性弹性动力学的 5 类变量、3 类变量、2 类变量和 1 类变量非传统 Hamilton 型变分原理的互补泛函, 以及相空间非传统 Hamilton 型变分原理的泛函。同时, 通过这条新途径还能清楚地阐明这些原理之间的内在联系。

关键词: 非线性弹性动力学; 非传统 Hamilton 变分原理; 对偶互补; 初值一边值问题; 限制变分; 相空间

中图分类号: O347 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 06-0052-05

Hamilton 于 1834 年提出动力学中著名的 Hamilton 原理, 它是一种积分形式的变分原理, 揭示出力学的变分结构。它对力学的发展有非常重要的意义。Hamilton 变分原理, 不仅使各种动力学方程都可以从一个变分式推导出来, 而且将其推广到物理学中, 可以推导出电动力学、统计力学、狭义相对论与广义相对论、量子力学和一些量子场论的基本方程。它的影响如此深远, 以致许多科学家把它看作是力学和物理学中功效最大的一个原理。近代物理学家薛定谔说: “Hamilton 原理是近代物理的基石”。著名量子物理学家狄拉克也非常推崇这个原理。因为它具有普适性, 也就是说, 它反映了物理学各个不同理论的同一性。尽管在牛顿力学、相对论、量子力学等一些辉煌理论的光芒照耀下, 人们并不特别注重它。其实, Hamilton 原理是力学与物理学中一颗光彩夺目的明珠, 它蕴含了深刻的美学意义。但美中不足的是, 人们熟悉的这种 Hamilton 型变分原理, 所考虑的是动力学时间端值一边值问题, 显然, 它不是与动力学初值一边值问题等价的变分原理。因此, 100 多年来, 探寻能反映动力学初值一边值问题全部特征的 Hamilton 型变分原理就成为力学界研究的一个热点与难点。国内外不少学者试图解决这个难题, 但都没有成功。

1989 年罗恩利用拟变分的思想, 建立了能反映几何非线性弹性动力学初值一边值问题全部特征

的各类 Hamilton 型拟变分原理^[1], 首次解决了上述难题。其后, 罗恩等人基于这种 Hamilton 型拟变分原理, 提出了动力响应分析的时间子域法^[2]。接着, 作者又建立了耦合热弹性动力学的各类 Hamilton 型拟变分原理^[3]。最近, 罗恩等人利用限制变分的思想^[4], 先后建立了有限变形压电弹性动力学和非线性耦合热弹性动力学的非传统 Hamilton 型变分原理^[5,6]、以及相空间非传统 Hamilton 型变分原理^[7]。这些非传统 Hamilton 型变分原理都能反映相应的动力学初值一边值问题的全部特征。因此, 它们都是对 Hamilton 型变分原理的重要革新。其关键就是对 Hamilton 型变分原理如何引进能反映初始条件的表达式。作者认为, 这种表达式是不惟一的, 可以有多种形式, 但选取的原则应当是其表达式形式简单, 并要通过数值计算的检验表明, 其计算量小和精度高。2003 年, 罗恩又提出了符合这种选取原则的能反映初始条件的新表达式^[8]。从上可知, 从 1989 年开始直到 2003 年, 罗恩才比较完美地解决了有关建立能反映动力学初值一边值问题全部特征的 Hamilton 型变分原理的难题。

本文在文 [8] 的基础上, 通过作者早已提出的一条简单而统一的新途径, 系统地建立了能反映几何非线性弹性动力学初值一边值问题全部特征的各类非传统 Hamilton 型变分原理和相空间非传统 Hamilton 型变分原理。此外, 文中还对 Hamilton 力

^{*} 收稿日期: 2004-05-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10172097); 高校博士点科研基金资助项目 (20030558025)

作者简介: 罗 恩 (1940 年生) 男, 教授, 博士生导师; E-mail: luoenzsu@sina.com.cn

学作了简述。

1 几何非线性弹性动力学的基本方程及条件

设弹性体为 V , 其边界为 ∂V , V 的闭包为 $\bar{V} = V \cup \partial V$, V 为三维空间的正则区域。模型均映射在 Lagrange 构型上。为简单起见, 下面的论述采用 Cartesian 张量记号, 且在空间直角坐标系中进行。

对于几何非线性弹性动力学, 其基本方程、边界条件和初始条件如下:

(1) 速度位移关系

$$v_i = \frac{Du_i}{Dt} = \dot{u}_i \tag{1}$$

(2) 动量速度关系

$$p_i = \rho v_i \tag{2}$$

相应的动能密度和余动能密度分别为

$$K(v_i) = \frac{1}{2} \rho v_i v_i, K^*(p_i) = \frac{1}{2\rho} p_i p_i$$

式中 ρ 是物体的质量密度。

(3) 运动方程

$$[(\hat{\sigma} + u_{i,j}) \sigma_{jk}]_{,k} + f_i = p_i \tag{3a}$$

或 $[(\hat{\sigma} + u_{i,j}) \sigma_{jk}]_{,k} + f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{3b}$

式中, σ_{jk} 为 Kirchhoff 应力张量, f_i 为体力矢量, $\hat{\sigma}$ 为 Kroneker delta。

(4) 几何方程

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \tag{4}$$

式中 ϵ_{ij} 为 Green 应变张量。

(5) 本构方程

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}, \text{ 或 } \epsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \tag{5a, b}$$

式中, E_{ijkl} 和 C_{ijkl} 分别为弹性刚度和柔性张量。

线弹性体的应变能密度 $\Phi(\epsilon_{ij})$ 和余应变能密度 $\Psi(\sigma_{ij})$ 分别为

$$\Phi(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}, \Psi(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \tag{6a, b}$$

(6) 边界条件

① 位移边界条件

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ 在 } \partial V_u \text{ 上} \tag{7a}$$

② 力的边界条件

$$T_i = (\hat{\sigma} + u_{i,j}) \sigma_{jk} n_k = \bar{T}_i, \text{ 在 } \partial V_T \text{ 上} \tag{7b}$$

式中, $\bar{u}_i, \bar{T}_i$ 为已知函数, 且 $\partial V = \partial V_u \cup \partial V_T, \partial V_u \cap \partial V_T = \emptyset$ 。

(7) 初始条件

$$u_{0i}(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}, 0) = \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}),$$

$$p_{0i}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}, 0) = \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in V \tag{8a, b}$$

式中, $\bar{u}_{0i}(\mathbf{x}), \bar{p}_{0i}(\mathbf{x})$ 为已知初始值。

2 广义虚功原理和虚功原理

可以证明, 对于互不相关的任意函数 σ_{ij}, p_i 和 u_i , 下列积分关系式恒成立。

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \int_V [p_i \dot{u}_i - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \sigma_{ij} - \\ & \quad \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \sigma_{ij}] dV dt + \\ & \int_0^{t_1} \int_V \{ \dot{p}_i u_i - [(\hat{\sigma} + u_{i,j}) \sigma_{jk}]_{,k} u_i \} dV dt + \\ & \int_0^{t_1} \int_{\partial V} T_i u_i ds dt - \\ & \int_V [u_i(\mathbf{x}, t_1) p_i(\mathbf{x}, t_1) - u_i(\mathbf{x}, 0) p_i(\mathbf{x}, 0)] dV = \\ & \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

式中, $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ 依次表示第 1, 2, 3, 4 项积分。

(9) 式是本文给出的一个重要关系式, 在力学上可以认为是几何非线性动力学的广义虚功原理的表式。从该式出发, 不仅能系统地建立几何非线性动力学的虚功原理和几何非线性弹性动力学的各类非传统 Hamilton 型变分原理, 而且能清晰地阐明这些原理之间的内在联系。

对于几何非线性动力学系统, 由于几何算子的非线性, 使得几何结构与平衡结构或阴结构与阳结构之间的对称性出现破缺。(9) 式的第一项积分中的 $u_{k,i} u_{k,j} \sigma_{ij} / 2$ 就是为了恢复其对称性而引入的破缺函数^[9]。

当 σ_{ij}, p_i 满足方程(3a) 和条件(7b), (8b); u_i 满足方程(1), (4) 和条件(7a), (8a) 时, 由(9) 式得

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \int_V f_i u_i dV dt + \int_0^{t_1} \int_{\partial V} T_i u_i ds dt - \\ & \int_V [u_i(\mathbf{x}, t_1) p_i(\mathbf{x}, t_1) - \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \bar{p}_{0i}(\mathbf{x})] dV = \\ & \int_0^{t_1} \int_V [(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^b) \sigma_{ij} - p_i v_i] dV dt \end{aligned} \tag{10}$$

式中, $\epsilon_{ij}^b = u_{k,i} u_{k,j} / 2$, 而 $\epsilon_{ij} \sigma_{ij}$ 可称为破缺的内力虚功。

(10) 式可以看成是几何非线性动力学的虚功原理的表式, 它反映广义动力可能状态与广义运动可能状态之间的最一般关系, 或者说, 它反映 $u_i, v_i, \epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^b$ 与 f_i, p_i, σ_{ij} 这两组阴阳变量或对偶变量之间的最一般关系。

从(10) 式可以看出, 几何非线性动力学的虚功原理与线性动力学的虚功原理最显著的区别就在于, 前者增加了破缺的内力虚功项。因此, 对于几何非线性动力学, 破缺函数对于虚功原理的成立起

着关键的作用。

从上述可知, 几何非线性动力学中的对称性破缺和破缺函数的存在, 是其重要的特点。这是线性动力学所没有的。

3 各类非传统 Hamilton 型变分原理

3.1 5 类变量广义变分原理

当 σ_{ij} 与 ϵ_{ij} 是互不相关的任意函数时, 可以得到下列关系式

$$\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \Phi(\epsilon_{ij}) + \Psi(\sigma_{ij}) + A(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}) \tag{11}$$

式中

$$A(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - E_{jkl}\epsilon_{kl})(\epsilon_{ij} - C_{ijkl}\sigma_{kl})$$

只有当 $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ 满足(5)式时, 才有

$$\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \Phi(\epsilon_{ij}) + \Psi(\sigma_{ij}) \tag{12}$$

于是, (9) 式第 1 项积分 Π_1 中的被积函数

$$\frac{1}{2}[(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\sigma_{ij} + u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}]$$

可变换为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\sigma_{ij} + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij} = \\ &\Phi(\epsilon_{ij}) - \sigma_{ij}\left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\right] + \\ &\Psi(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij} + A(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}) \end{aligned} \tag{13}$$

当 p_i 与 v_i 是互不相关的任意函数时, 可以得到下列关系式

$$p_i v_i = K(v_i) + K^*(p_i) - B(p_i, v_i) \tag{14}$$

式中

$$B(p_i, v_i) = \frac{1}{2\rho}(\rho v_i - p_i)(\rho v_i - p_i)$$

只有当 p_i 与 v_i 满足 (2) 式时, 才有

$$p_i v_i = K(v_i) + K^*(p_i) \tag{15}$$

于是, (9) 式第 1 项积分 Π_1 中的被积函数 $p_i u_i$ 可变换为

$$p_i u_i = K(v_i) - p_i(v_i - u_i) + K^*(p_i) - B(p_i, v_i) \tag{16}$$

上述(11)和(14)式是本文给出的广义 Legendre 变换式。

而(9)式的 $\Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4$ 可变换为

$$\Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4 =$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1} \int_V \{p_i u_i - [\delta_{ij} + u_{i,j})\sigma_{jk}]_{,k} u_i - f_i u_i\} dV dt + \\ &\Gamma_B + \overset{\circ}{\Gamma} + \int_0^{t_1} \int_V f_i u_i dV dt + \Pi_B + \overset{\circ}{\Pi} \end{aligned} \tag{17}$$

式中

$$\begin{aligned} \Pi_B &= \int_0^{t_1} \left[\int_{\partial V_T} T_i u_i ds + \int_{\partial V_u} (u_i - \bar{u}_i) T_i ds \right] dt + \\ &\int_V \{ \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}, t_1) - [\bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}, 0)] p_i(\mathbf{x}, 0) \} dV \\ \Gamma_B &= \int_0^{t_1} \left[\int_{\partial V_u} \bar{u}_i T_i ds + \int_{\partial V_T} (T_i - \bar{T}_i) u_i ds \right] dt + \\ &\int_V [\bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}, t_1)] dV \\ \overset{\circ}{\Pi} &= - \int_V [\overset{\circ}{p}_i(\mathbf{x}, t_1) u_i(\mathbf{x}, t_1) + \overset{\circ}{p}_i(\mathbf{x}, 0) u_i(\mathbf{x}, t_1)] dV \\ \overset{\circ}{\Gamma} &= - \int_V [\overset{\circ}{u}_i(\mathbf{x}, t_1) p_i(\mathbf{x}, t_1) - \overset{\circ}{p}_i(\mathbf{x}, 0) u_i(\mathbf{x}, t_1)] dV \end{aligned}$$

其中带顶标 $\overset{\circ}{}$ 的量为限制变分量^[4]。

将 (13), (16) 和(17) 式代入(9) 式中, 经整理后

$$\Pi_5(p_i, v_i, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, u_i) + \Gamma_5(p_i, v_i, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, u_i) = 0 \tag{18}$$

而泛函 Π_5 和 Γ_5 分别为

$$\begin{aligned} \Pi_5 &= \int_0^{t_1} \int_V \{ K(v_i) - p_i(v_i - u_i) - \Phi(\epsilon_{ij}) + \\ &\sigma_{ij} \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \right] + f_i u_i \} dV dt + \\ &\Pi_B + \overset{\circ}{\Pi} \\ \Gamma_5 &= \int_0^{t_1} \int_V \{ K^*(p_i) - B(p_i, v_i) - \Psi(\sigma_{ij}) - \\ &\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij} - A(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}) - \end{aligned} \tag{19}$$

$$[(\delta_{ij} + u_{i,j})\sigma_{jk}]_{,k} u_i + f_i - p_i \} dV dt + \Gamma_B + \overset{\circ}{\Gamma} \tag{20}$$

定理 1 当且仅当 $p_i, v_i, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, u_i$ 是混合问题 (1), (2), (3a), (4), (5a), (7a, b), (8a, b) 式的解, 则必定满足变分式 $\delta \Pi_5 = 0$ 或 $\delta \Gamma_5 = 0$ 。

因篇幅所限, 略去定理 1 的证明。

Π_5 和 Γ_5 分别是 5 类变量非传统 Hamilton 型广义变分原理的势能形式和余能形式的泛函。对于任意不相关的函数 $p_i, v_i, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, u_i$, 它们之间存在互补关系(18)。

从(18) 式可以推导出 3 类变量($\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, u_i$) 和 2 类变量(σ_{ij}, u_i) 非传统 Hamilton 型广义变分原理的泛函式。因篇幅所限, 均略去。

3.2 1 类变量广义变分原理

当 p_i, v_i, u_i 满足(1) 和(2) 式, ϵ_{ij} 与 u_i 满足(4) 式时, 泛函 Π_5 就变成

$$\begin{aligned} \Pi_1(u_i) &= \int_0^{t_1} \int_V \left\{ K(u_i) - \right. \\ &\left. \Phi \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \right] + f_i u_i \right\} dV dt + \Pi_B - \end{aligned}$$

$$\int_V [\overset{\circ}{\rho} u_i(\mathbf{x}, t_1) u_i(\mathbf{x}, t_1) + \overset{\circ}{\rho} u_i(\mathbf{x}, 0) u_i(\mathbf{x}, t_1)] dV \tag{21}$$

式中, $K(u) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\rho} u_i u_i$

定理 2 当且仅当 u_i 是混合问题(7a), (8a, b) 及下式

$$\left\{ (\hat{q} + u_{i,j}) \left[\frac{1}{2} E_{jkmn} (u_{m,n} + u_{n,m} + u_{l,n} u_{l,m}) \right] \right\}_{,k} + f_i = \dot{\hat{u}}_i \tag{22}$$

$$\left\{ (\hat{q} + u_{i,j}) \left[\frac{1}{2} E_{jkmn} (u_{m,n} + u_{n,m} + u_{l,n} u_{l,m}) \right] \right\}_{,k} n_k = T_i, \tag{23}$$

在 ∂V_T 上

的解, 则必定满足变分式 $\delta I_1 = 0$.

I_1 是一类变量非传统 Hamilton 型广义变分原理的势能形式的泛函。

4 相空间非传统 Hamilton 型变分原理与 Hamilton 力学

相空间的概念起源于统计力学, 而“相空间”是由美国物理学家 Gibbs 于 1902 年起名的。所谓相空间就是由广义位移向量 q 和广义动量向量 p 所构成的空间 $\{q, p\}$ 。相空间可将动力系统的状态几何化, 它是现代科学最重要的发明之一。

1834 年英国数学家、物理学家与力学家 Hamilton 建立了相空间的 Hamilton 正则方程; 而 58 年后, 即在 1892 年相空间 Hamilton 变分原理才由法国数学家 Poincaré 提出, 至今已有 100 多年, 但没有受到应有的重视, 国内外对其论述的文献相当少, 国内 1985 年出版的中国大百科全书(力学卷)中也没有这种变分原理的条目。

Hamilton 力学的最核心部分就是相空间 Hamilton 正则方程和相空间 Hamilton 变分原理。尽管相空间 Hamilton 变分原理是力学与物理学中另一颗光彩夺目的明珠, 但美中不足的是, 它所对应的是动力学的时间两端值问题, 显然, 它不是与动力学初值问题等价的变分原理。直到 110 年后, 即在 2002 年才由罗恩建立了能反映动力学初值问题全部特征的相空间非传统 Hamilton 型变分原理^[7], 并提出了基于这种新变分原理的一种辛算法。2003 年罗恩又提出了一种更好的相空间非传统 Hamilton 型变分原理的新表达式^[8]。作者所建立的相空间非传统 Hamilton 变分原理是对相空间 Hamilton 变分原理的重要革新。

本文在文 [8] 的基础上, 通过作者早已提出的一条简单而统一的新途径, 建立了能反映非线性弹性动力学初值-边值问题全部特征的相空间非传统

Hamilton 型变分原理。其建立过程如下:

当 p_i 与 v_i 和 ε_{ij} 与 u_i 分别满足(2) 式和(4) 式时, 泛函 I_2 就变成

$$I_2(u_i, p_i) = \int_0^{t_1} \int_V [p_i(\dot{u}_i) - H(u_i, p_i)] dV dt + \overset{\circ}{I}_{IB} + \overset{\circ}{I} \tag{24}$$

式中, Hamilton 函数

$$H(u_i, p_i) = \frac{1}{2 \overset{\circ}{\rho}} p_i p_i + \Phi \left[\frac{u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}}{2} \right] - f_i u_i \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

由 $\delta I_2(u_i, p_i) = 0$, 可以推导出 Hamilton 正则方程

$$u = \partial H / \partial p = H_p, \quad p = - \partial H / \partial u = - H_u \tag{25a, b}$$

或

$$u_i = p_i / \overset{\circ}{\rho}, \quad p_i = \left\{ (\hat{q} + u_{i,j}) \left[\frac{E_{jkmn} (u_{m,n} + u_{n,m} + u_{l,n} u_{l,m})}{2} \right] \right\}_{,k} + f_i \tag{26a, b}$$

和边界条件(7a, b)与初始条件(8a, b), 式中, $u = [u_1, u_2, u_3]^T, p = [p_1, p_2, p_3]^T, H_u = [\partial H / \partial u_1, \partial H / \partial u_2, \partial H / \partial u_3]^T, H_p = [\partial H / \partial p_1, \partial H / \partial p_2, \partial H / \partial p_3]^T$

定理 3 当且仅当 u_i, p_i 是混合问题(26a, b), (7a, b)与(8a, b)式的解, 则必定满足变分式 $\delta I_2(u_i, p_i) = 0$ 。

I_2 是二类变量相空间非传统 Hamilton 型变分原理的泛函。

为了揭示 Hamilton 正则方程的数学结构, 就要打破传统概念的限制, 引进新概念。为此, 将(25a, b)式写成矩阵形式

$$[u, p]^T = J [H_u, H_p]^T \tag{27}$$

式中, $J = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix}$, I_3 为 3 阶单位阵, 方阵 J 是辛几何的度量矩阵, 它是辛矩阵。

(27) 式揭示了 Hamilton 正则方程和相应的相空间非传统 Hamilton 变分原理都具有自然辛结构。这个自然辛结构在 Hamilton 力学中起着决定性的作用, 并揭示出力学的辛几何结构, 它使 Hamilton 力学显得更加简洁、对称和完美。利用这个辛结构, 可以很容易得到 Hamilton 力学的现有全部结论。因此, Hamilton 力学可以称为辛几何的力学。正是这个最根本的原因, 使得对应于辛几何的 Hamilton 力学体系的算法要比对应于 Riemann 几何的 Lagrange 力学体系的算法和对应于 Euclid 几何的 Newton 力学体系的

算法, 具有更加优越的计算功能。

上述的力学体系与数学的几何结构的对应, 对于力学的发展是非常重要的。因为它使强有力的数学手段进入了力学体系中, 从而提高对力学问题的求解能力和计算性能, 使力学的理论模型变得更加清晰、更加严密和更加完美, 并为力学的一般化开辟了新的道路。

动力学体系本质上应当是 Hamilton 体系, 因此动力学的基本理论和算法要完全在 Hamilton 体系内建立, 才是最合理和最完美的选择。但是 100 多年来动力学的基本理论和算法都是在 Lagrange 体系内建立的, 这不是最合理和最完美的选择, 它导致有些问题难以或不能解决。因此, 我们认为, 应当与时俱进, 及时将动力学从 Lagrange 体系转换为 Hamilton 体系。这种体系的变革, 影响将是深远的, 意义将是重大的。

5 结 语

本文所建立的几何非线性弹性动力学的各类非传统 Hamilton 型变分原理和相空间非传统 Hamilton 型变分原理, 都是限制变分原理, 它们能反映这种动力学初值一边值问题的全部特征。由于这些新的变分原理克服了传统 Hamilton 型变分原理不能反映动力学初值一边值问题全部特征的固有缺陷, 所以它们是对 Hamilton 型变分原理的重要革新。文中所建立的各类非传统 Hamilton 型变分原理和相空间非

传统 Hamilton 型变分原理不仅是几何非线性弹性动力学的重要组成部分, 而且是其一般理论中最核心的部分。因此, 所建立的这些新的变分原理, 无论在有关动力学理论研究方面, 还是在建立结构动力分析的各种近似解法和工程实用理论方面都有重要价值。

参考文献:

- [1] 罗恩. 几何非线性弹性动力学中广义 Hamilton 型拟变分原理[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1990, 29(2): 15—19.
- [2] 罗恩, 潘小强, 张贺忻, 等. 一种基于 Hamilton 型拟变分原理的时间子域法[J]. 工程力学, 2000, 17(4): 13—20.
- [3] 罗恩. 耦合热弹性动力学中各类 Hamilton 型拟变分原理[J]. 固体力学学报, 2001, 22(3): 239—246.
- [4] FINLAYSON B A, SCRIVEN L. On the search for variational principles[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1967, 10: 799.
- [5] 罗恩, 罗志国. 有限变形压电弹性动力学的非传统 Hamilton 型变分原理[C] // 钱学森. 技术科学思想与力学. 北京: 国防工业出版社, 2001: 337—342.
- [6] 罗恩, 邱君尚, 黄伟江, 等. 非线性耦合热弹性动力学的非传统 Hamilton 型变分原理[J]. 中国科学(A 辑), 2002, 32(4): 337—347.
- [7] 罗恩, 黄伟江, 张贺忻. 相空间非传统 Hamilton 型变分原理与辛算法[J]. 中国科学(A 辑), 2002, 32(12): 1119—1126.
- [8] 罗恩, 黄伟江, 朱慧坚. Hamilton 弹性动力学及其辛算法——一个新学科研究的进展[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2003, 42(5): 131—132.

An Innovation for the Hamilton type Variational Principles in Nonlinear Elastodynamics —Unconventional Hamilton type Variational Principles

LUO En, JIANG Feng hua

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: According to the basic idea of classical yin yang complementarity and modern dual complementarity, in a new, simple and unified way proposed by Luo, the unconventional Hamilton type variational principles for geometrically nonlinear elastodynamics can be established systematically. The unconventional Hamilton type variational principle can fully characterize the initial boundary value problem of geometrically nonlinear elastodynamics. This new variational principle is equivalent to the above problem of this dynamics, so that it is an important innovation for the Hamilton variational principle. An important integral relation is given, which can be considered as the expression of the generalized principle of virtual work for geometrically nonlinear dynamics. Based on this relation, it is possible not only to obtain the principle of virtual work in geometrically nonlinear dynamics, but also to derive systematically the complementary functionals for five-field, three field, two field and one field unconventional Hamilton type variational principles, and the functional for the unconventional Hamilton type variational principle in phase space by the generalized Legendre transformations given here. Furthermore, with this new approach, the intrinsic relationship among various principles can be explained clearly.

Key words: nonlinear elastodynamics; unconventional Hamilton variational principle; dual complementary relation; initial boundary value problem; restricted variation; phase space