

狭窄动脉血管中 Poiseuille 流动对管壁切应力的影响^{*}

刘国涛, 王先菊, 艾保全, 刘良钢
(中山大学物理学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 对血管入口流动为 Poiseuille 流动时, 血液流动对血管狭窄部位的管壁切应力及压力等的影响进行研究。利用不可压缩的 N-S 方程作为计算的理论基础, 采用有限差分方案作为计算手段以得到在此流动过程中的数值解。

关键词: Poiseuille 流; 狭窄动脉; 管壁切应力; 数值分析

中图分类号: Q274 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 02-0029-04

动脉粥样硬化是一种严重影响人类健康的疾病, 它的形成、发展与分布同血液动力学因素有着密切的联系。动脉硬化斑块不是随机地出现在动脉系统的任何部位, 通常只在许多确定的动脉部位出现, 如腹主动脉末端、冠状动脉、颈动脉分叉以及脑底动脉环等。同时由于血管系的复杂性 (如狭窄、弯曲、锥缩、分叉等) 和血液生理流动的复杂性以及现今实验手段、实验条件等方面的限制, 人们对这种血液动力学因素所引起病变的作用过程认识还不够充分。而血液在血管中流动所产生的不同应力一般分为切应力、周向应力和压应力, 其中切应力在心血管系统的病理和生理过程中起着重要的作用。自从 20 世纪 50 年代 Womersley 等创立血液动力学以来, 血流过程中对血管壁的作用力研究就迅猛发展起来, 对狭窄动脉管中的血液流动的研究也随之发展起来。人们从理论、实验^[1,2] 和数值模拟^[3-6] 方面对该问题进行了研究。本文对轴对称狭窄刚性血管中的 Poiseuille 流进行了研究, 并假定血液是牛顿流体。文中着重比较了狭窄尺度相同而雷诺数不同以及雷诺数相同而狭窄尺度不同时管壁的切应力及压力降分布。

1 基本方程

1.1 管壁几何模型

假定血管段的狭窄是轴对称的, 其管壁任一纵向剖面的形状为图 1 所示的余弦曲线。于是建立局部狭窄血管段的管壁几何模型为:

$$\frac{r}{R_0} = \begin{cases} 1 - \frac{h}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{z_0} \right) & |z| \leq z_0 \\ 1 & |z| > z_0 \end{cases} \quad (1)$$

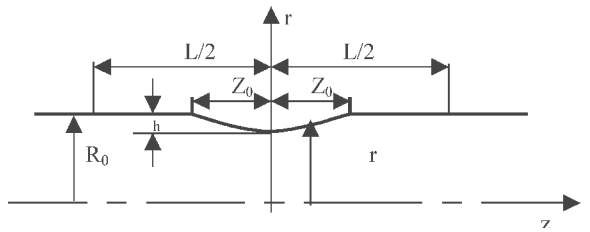


图 1 局部狭窄血管段的纵向剖面

Fig 1 The vertical profile of the local stenosed vessel

其中, h 是狭窄的最大高度, L 是血管段长度, z_0 是狭窄总长度的一半, R_0 是狭窄发生前的血管半径。

1.2 柱坐标系下控制方程

文中, 假设流体是不可压缩、等温的牛顿流体, 流动是定常的轴对称层流。于是在柱坐标系下流动控制方程的无量纲形式为:

$$\frac{\partial(nu)}{\partial z} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$St \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (3)$$

$$St \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (4)$$

其中的无量纲量为: $r = r^*/R_0, z = z^*/R_0, t = t^*/T, u$ 是速度矢量 V 在 z 方向上的无量纲分量, 即 $u = u^*/u_0, v$ 是速度矢量 V 在 r 方向上的无量纲分量, 即 $v = v^*/u_0, p$ 是无量纲压力, 即 $p = p^*/\rho u_0^2$,

* 收稿日期: 2003-08-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10275099, 10175096); 广东省自然科学基金资助项目 (001182, 021707)

作者简介: 刘国涛 (1976 年生), 女, 博士研究生; 通讯联系人: 刘良钢; E-mail: stdp05@zsu.edu.cn

St 是 Strouhal 数, 即 $St = R_0 / (Tu_0)$, Re 是雷诺数, 即 $Re = R_0 u_0 / \nu$, 而 R_0 是血管狭窄前的半径, u_0 是入口处的平均速度, T 是流动周期, ν 是血液的运动粘度。为了便于计算把 N_s 方程(即方程(3)、(4)) 用流函数涡量(Ψ_s) 的形式写出:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -r\zeta \tag{5}$$

$$St \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial z} + v \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + v \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{\zeta}{r^2} \right] + \frac{v}{r} \zeta \tag{6}$$

其中, $u = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\zeta = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}$ 。在此形式下, 方程(2) 自动得到满足。

本文采用边界拟合法, 把物理平面 ($z-r$) 上的关系式转换到计算平面 ($\xi-\eta$) 上。于是方程(5)、(6) 分别为:

$$\frac{1}{J^2} (\alpha \varphi_{\xi\xi} - 2\beta \varphi_{\xi\eta} + \gamma \varphi_{\eta\eta} + \sigma \varphi_{\eta} + \tau \varphi_{\xi}) - \frac{1}{rJ} (\varphi_{\eta z} - \varphi_{z\eta}) = -r\zeta \tag{7}$$

$$St \zeta_t + \frac{1}{rJ^2} (\varphi_{\xi z} - \varphi_{z\xi}) (\zeta_{\xi r} - \zeta_{r\xi}) - \frac{1}{rJ^2} (\varphi_{\xi r} - \varphi_{r\xi}) (\zeta_{\eta z} - \zeta_{z\eta}) = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{J^2} (\alpha \zeta_{\xi\xi} - 2\beta \zeta_{\xi\eta} + \gamma \zeta_{\eta\eta} + \sigma \zeta_{\eta} + \tau \zeta_{\xi}) + \frac{1}{rJ} (\zeta_{\eta z} - \zeta_{z\eta}) - \frac{\zeta}{r^2 J} (\varphi_{\xi r} - \varphi_{r\xi}) \right] \tag{8}$$

其中, $J = z_{\xi} r_{\eta} - r_{\xi} z_{\eta}$, $\alpha = z_{\eta}^2 + r_{\eta}^2$, $\beta = z_{\xi} z_{\eta} + r_{\xi} r_{\eta}$, $\gamma = z_{\xi}^2 + r_{\xi}^2$, $\sigma = \frac{1}{J} (r_{\xi} D_z D_r)$, $\tau = \frac{1}{J} (z_{\eta} D_r - r_{\eta} D_z)$, $D_z = \alpha z_{\xi\xi} - 2\beta z_{\xi\eta} + \gamma z_{\eta\eta}$, $D_r = \alpha r_{\xi\xi} - 2\beta r_{\xi\eta} + \gamma r_{\eta\eta}$ 。

2 数值计算与边界条件

利用管壁几何模型, 采用下面如图 2 所示的计算网格。

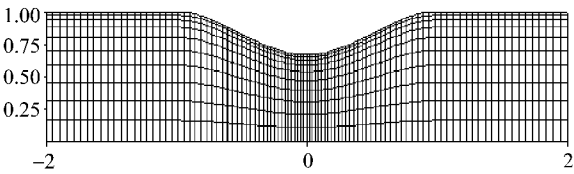


图 2 计算网格
Fig 2 The computational grid

计算区域为 $-10 \leq z \leq 22$, 计算网格数为 200×20 。通过调整方程(1) 中的 h 和 z_0 来控制血管的狭窄程度。

对方程(7)、(8) 利用有限差分方法进行时间和空间离散, 利用边界条件, 采用超松弛迭代法进行求解。对入口假定其流动为 Poiseuille 流动, 于是有:

$$\varphi = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4, \quad \zeta = -2r \tag{9}$$

假设流动区域的出口离血管狭窄部位足够远, 流场沿 z 轴不再发生变化, 这时有:

$$\varphi = 0, \quad \zeta_z = 0 \tag{10}$$

在血管的对称轴上(即 $r=0$ 时) 考虑流动的对称性有:

$$\varphi = 0, \quad \zeta = 0 \tag{11}$$

在血管壁上(即 $r=1$ 时) 认为流动不产生滑移, 即

$$u = 0, \quad v = 0 \tag{12}$$

3 计算结果与分析

通过改变各参数可以获得大量的有关流场的信息。本文的主要目的是研究入口为 Poiseuille 流动时, 雷诺数和血管狭窄程度(即血管狭窄的高度和长度) 对流场的影响。

在计算过程中用到的 6 个基本的狭窄血管模型数据见表 1。为了与血管未出现狭窄时的情况进行更好的比较, 在计算中对模型 M0 也进行了数值计算。表中模型 M1、M2、M3 的狭窄长度相同, 由于狭窄引起的血管截面积分别减少了 44%、56%、75%。与模型 M3 相比较模型 M4 的狭窄长度是模型 M3 的 2 倍, 模型 M5 的狭窄长度是模型 M3 的 1/2。

表 1 狭窄血管模型
Tah 1 The models of the stenosed vessels

狭窄模型	M0	M1	M2	M3	M4	M5
狭窄高度 h	0	1/4	1/3	1/2	1/2	1/2
狭窄长度 $2z_0$	0	8	8	8	16	4
截面积减少/%	0	44	56	75	75	75

对这 6 个基本狭窄模型进行数值计算并对其结果进行分析。

从图 3 可以看出, 当雷诺数 Re 一定时, 模型 M0 所代表的无狭窄均匀圆管管壁上的压力降与长度成正比, 当狭窄长度相同而狭窄高度不同(模型 M1、M2、M3) 时, 狭窄高度越大, 管壁上的压力降就越大; 当狭窄高度相同而狭窄长度不同(模型 M3、M4、M5) 时, 狭窄长度越长, 管壁上的压力降就越大。

管壁切应力是血液动力学的另一个重要参数, 当 $Re=100$ 时, 其分布如图 4。从图中可以看出,

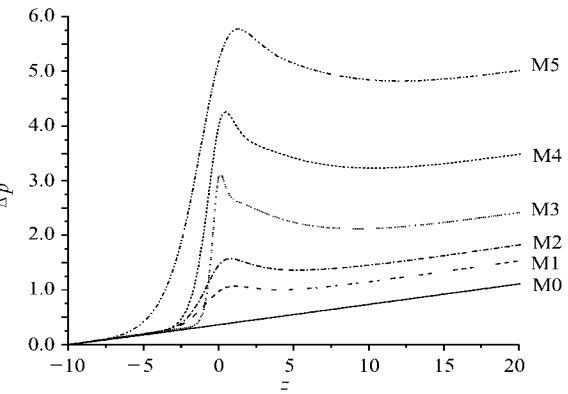


图 3 流动达到稳定时管壁上的压力降分布图 ($Re=100$)

Fig 3 The distributions of the wall pressure drop ($Re=100$)

无狭窄均匀圆管（模型 M0）管壁切应力几乎不发生变化。存在狭窄时，管壁切应力值在 $-0.325 \sim 0.0125$ 之间振荡，振荡的负的峰值出现在靠近狭窄喉部（ $z=0$ 处）的上游，当这个峰值达到血管内皮细胞膜的临界应力时，该血管部位就会发生机械应力的损伤。当狭窄高度一定时，狭窄长度越短，振荡的负峰值越大；当狭窄长度一定时，狭窄高度越大，振荡的负峰值就越大。并且在模型 M3、M4、M5 中狭窄喉部的下游血管壁附近有流动分离区形成。在该区域内血液会发生滞流，血液中的血小板和纤维蛋白就会沉积，并在血管壁处形成网络结构致使血液中的脂质颗粒沉积，而最终导致动脉粥样硬化现象的出现。

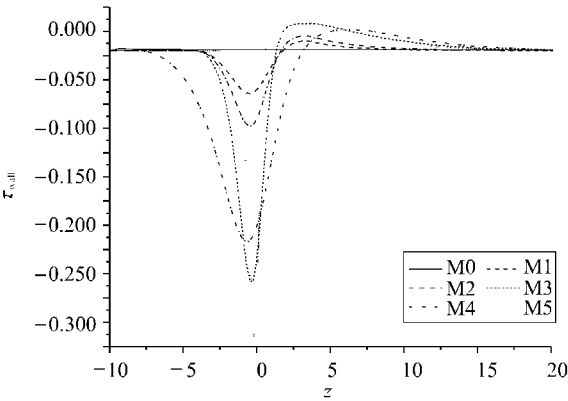


图 4 流动达到稳定时的管壁切应力分布图 ($Re=100$)

Fig 4 The distributions of the wall shear stress ($Re=100$)

采用模型 M3，计算 Re 不同而狭窄尺寸相同时的管壁切应力、压力降和流函数分布（图 5—7）。从图 5、6 可以看出，狭窄尺寸一定时，随着 Re 增大，管壁上的压力降降低，管壁切应力振荡的负峰值减小，而且 Re 越大，流动分离区域就越大。流函数分布见图 7，3 种情况都出现了流动分离现象， Re 越大，流动分离区域越大。

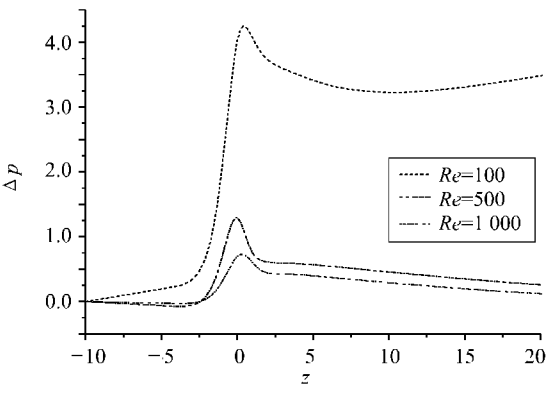


图 5 流动达到稳定时管壁压力随 Re 的变化曲线（模型 M3）

Fig 5 The distributions of the wall pressure drop with Re (Model M3)

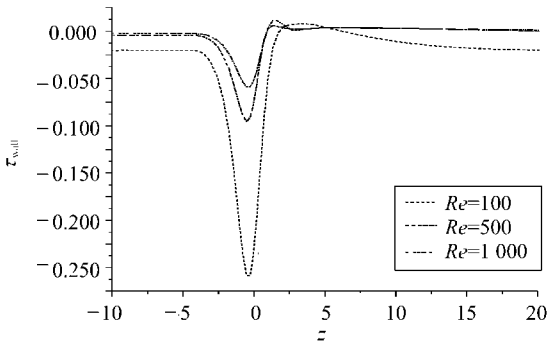


图 6 流动达到稳定时管壁切应力随 Re 的变化曲线（模型 M3）

Fig 6 The distributions of the wall shear stress with Re (Model M3)

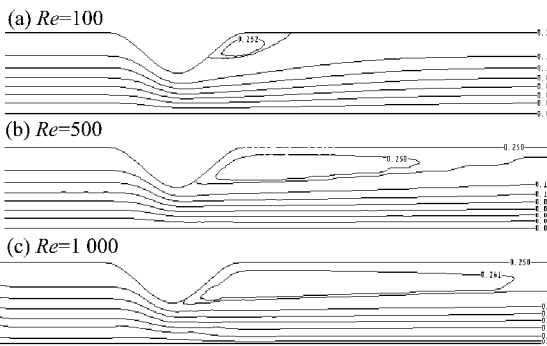


图 7 流动达到稳定时不同 Re 下的流函数图（模型 M3）

Fig 7 The streamline distributions (Model M3)

4 结 语

文中讨论了入口流动为 Poiseuille 流动时， Re 和狭窄尺寸对血管壁上的切应力和压力降以及流函数分布的影响。从中可以得到一些结论：当雷诺数与狭窄长度不变时，狭窄高度越大（即由于狭窄所引起的横截面积减少越大），流动越容易产生分离；

当狭窄尺寸（狭窄高度与狭窄长度）一定时，雷诺数越大，流动越容易产生分离。由于在生理条件下，流动分离区域中的动力学参数可能会直接或间接导致血管壁发生病变，所以如果能使狭窄附近的流动避免出现分离现象，这样对于防止动脉粥样硬化的形成颇为重要。

参考文献:

[1] SIOUFFI M, DEPLANO V, PELISSIER R. Experimental analysis of unsteady flows through a stenosis[J] . J Biomech, 1998, 31: 11— 19.
[2] DEPLANO V, SIOUFFI M. Expenimental and numerical study of pulsatile flows through stenosis; Wall shear stress

analysis[J] . J Biomech, 1999, 32: 1081— 1090.
[3] ZENDEHBUDI G R, MOAYERI M S. Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries[J] . J Biomech, 1999, 32: 959— 965.
[4] LONG Q, XU X Y, RAMNARINE K V, et al. Numerical investigation of physiologically realistic pulsatile flow through arterial stenosis[J] . J Biomech, 2001, 34: 1229— 1242.
[5] BERTOLOTTI C, DEPLANO V. Three-dimensional numerical simulations of flow through a stenosed coronary byps[J] . J Biomech, 2000, 33: 1011— 1022.
[6] MOAYERI M S, ZENDEHBUDI G R. Effects of elastic property of the wall on flow characteristics through arterial stenoses[J] . J Biomech, 2003, 36: 525— 535.

Effect of the Poiseuille Flow Through the Stenosed Arteries on Wall Shear Stress

LIU Guo tao, WANG Xian ju, AI Bao quan, LIU Liang gang
(Department of Physics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Poiseuille flow through the stenosed arteries is analyzed numerically and its effect on the flow field of stenosed region is studied. The incompressible Navier Stokes equation is adopted to caelulate the flow field, and a finite difference scheme is used to implement the numerical analysis.
Key words: Poiseuille flow; stenosed artery; wall shear stress; numerical analysis

(上接第 28 页)

Accelerating Computation Method for the Hypre strong Pseudoprime and Prime Tests

WANG Ze hui
(Department of Scientific Computation and Computer Science, Sun Yat sen Univerity, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The concept of hyper strong pseudoprime, as well as the corresponding HSP (n, h) prime test algorithm, is proposed. It can decrease the error rate for the most extensively used prime test Miller Rabin algorithm $1/4$ to $1/30$ for one sub class, which can be repeated fom m times test by increasing $O(\log_2 n)$ times multiplication. Thus, accelerating prime test method can be established and used to generate large prime.
Key words: hyper strong pseudoprime; prime test; square of timing complexity; generation of large prime