

两类生灭过程爆发前的若干向上性质^{*}

朱全新, 戴永隆
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 文章研究以 0 为反射壁和以 0 为拟飞射壁的 2 种生灭过程爆发前的性质, 通过引入无穷维线性方程组和推移算子, 得到了多种情况下此类过程在爆发前从状态 i 运动到状态 n ($i \leq n \leq \infty$) 的平均时间的精确表达式。而且, 一些已有结果是这里的特例。

关键词: Q^a 过程; 生灭过程; 反射壁; 拟飞射壁; 爆发前

中图分类号: O211.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 02-0001-04

众所周知, 生灭过程是一类重要的可列 Markov 过程, 它可以由给定的生灭 Q 矩阵确定, 其中 $Q = (q_{ij})$, $i, j \in E = \{0, 1, 2, \dots\}$, 即, 其中 $q_{ij} = 0$ ($|i - j| > 1$), $-q_{00} = q_0 = a_0 + b_0$ ($a_0 \geq 0, b_0 \geq 0$), $q_{i+1} = b_i > 0$ ($i \geq 0$), $q_{ii-1} = a_i > 0$ ($i \geq 1$), $-q_{ii} = q_i = a_i + b_i$ ($i \geq 0$)。状态 0 依 a_0, b_0 的取值不同可分为 4 种情形:

- ① 如 $a_0 = 0, b_0 > 0$, 称 0 为反射壁;
- ② 如 $a_0 = 0, b_0 = 0$, 称 0 为吸收壁;
- ③ 如 $a_0 > 0, b_0 = 0$, 称 0 为飞射壁;
- ④ 如 $a_0 > 0, b_0 > 0$, 称 0 为拟飞射壁。

特别地, 当 $b_0 > 0$ 时, 记 $a = a_0$, 并用 $Q^a = Q$ 表示 Q 矩阵对于 a 的依赖性。王梓坤^[1] 借助差分方程对以 0 为反射壁的生灭过程爆发前从状态 i 运动到状态 $i+1$ 的平均时间, 从状态 0 运动到状态 ∞ 的平均时间以及从某状态出发运动到比它小的状态再到比它大的状态的概率等性质有彻底的研究。杨向群^[2] 和朱全新^[3] 借助线性方程组对以 0 为反射壁和以 0 为拟飞射壁的生灭过程爆发前的性质进行了研究。本文进一步研究以 0 为反射壁和以 0 为拟飞射壁即 ① 和 ④ 两种情形的生灭过程爆发前的向上性质 (这里的“向上”是指过程从编号小的状态运动到编号大的状态), 并且通过引入无穷维线性方程组和推移算子, 本文得到了多种情况下过程在爆发前从状态 i 运动到状态 n ($i \leq n \leq \infty$) 的平均时间的精确表达式。这里得到了许多新结果, 它们在文 [1, 2] 中没有研究过。具体地说, 我们求出了过程在爆发前从某状态出发先到状态 0 再到比它大的状态的平均时间及从某状态出发运动到比它大的状态的

平均时间, 也求出了当第 1 个飞跃点的左极限为状态 0 时, 过程在爆发前从某状态出发运动到比它大的状态的平均时间及从某状态出发运动到状态 ∞ 的平均时间。

1 记号和背景

对矩阵 Q^a , 令

$$\begin{cases} z_0 = 1/a, & \text{如果 } a > 0; \\ z_0 = 0, & \text{如果 } a = 0; \\ z_1 = z_0 + 1/b_0; \\ z_n = z_{n-1} + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}, & (n \geq 2); \\ z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \end{cases} \quad (1)$$

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = \frac{b_0}{a_1},$$

$$\mu_n = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}, \quad (n \geq 2) \quad (2)$$

称 $\{z_n\}$ 为自然尺度, z 为边界点, $\{\mu_n\}$ 为标准测度。令

$$C_{kj}^a = \begin{cases} \frac{a(z_k - z_0) + 1}{a(z_j - z_0) + 1}, & \text{如 } k \leq j; \\ \frac{z - z_k}{z - z_j}, & \text{如 } k > j \end{cases} \quad (3)$$

$$X_k^1 = \frac{a(z - z_k)}{a(z - z_0) + 1},$$

$$X_k^2 = \frac{a(z_k - z_0) + 1}{a(z - z_0) + 1} \quad (4)$$

本文约定 $\frac{\infty}{\infty} = 1, 0^\circ \infty = 0, \frac{C}{\infty} = 0$ (C 是有限数),

* 收稿日期: 2003-05-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271120)

作者简介: 朱全新 (1975 年生), 男, 博士生; 通讯联系人: 戴永隆; E-mail: zqx1975@sina.com

以后亦然。

今设 $X = \{X(t), t \leq \sigma\}$ 是定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的寿命为 $\sigma (\leq \infty)$ 的齐次 Markov 过程, 有非负整数集状态空间 E . 如果 X 的转移概率矩阵 $P(t)$ 在 0 点的右导数 $P'(0) = Q^a$, 便称 X 是 Q^a 的过程. 不妨假设 X 是典范过程^[1], 即 X 是完全可分的、Borel 可测的、右下半连续的 Markov 过程, 且有推移算子族 $\{\theta_t, t \geq 0\}$. 还可假设 X 有正的初始分布, 即 $P(X(0) = i) > 0$ 对一切 $i \in E$, 且 $\sum_i P(X(0) = i) = 1$. 这样, 可确定测度 $P_i(A) = P(A | X(0) = i)$ 及期望 $E_i(f, A) = \int_A f dP_i$. 此外, 如果 $\sigma < \infty$, 可对 $t \geq \sigma$ 补定义 $X(t) = -1$. 于是 $X = \{X(t), t \leq \infty\}$ 的状态空间为 $E \cup \{-1\}$, 过程不中断, 且初始分布集中于 E , 而 -1 是吸收状态. 令

$$\tau^a_i = \inf\{t: 0 < t < \sigma, \lim_{s \uparrow t} X(s) = \infty \text{ 或 } \lim_{s \downarrow t} X(s) = \infty\} \quad (5)$$

约定 $\inf \phi = \sigma$, 称 τ^a 为 X 的第 1 个飞跃点. τ^a 前 σ 域记为 $\mathcal{F}_{\tau^a}$, τ^a 后 σ 域记为 $\mathcal{F}'_{\tau^a}$. 由 [2, 第十一章 §2 定理 1] 知

$$\begin{aligned} P_k(x(\tau^a - 0) = 0) &= X^1_k, \\ P_k(x(\tau^a - 0) = \infty) &= X^2_k \end{aligned} \quad (6)$$

令

$$\eta^a_i = \inf\{t: 0 \leq t < \tau^a, x(t) = i\} \quad (7)$$

约定 $\inf \phi = \infty$, 称 η^a_i 为在飞跃点 τ^a 以前 i 的首中时. 由 [2, 第十一章 §2(7) 式] 知,

$$P_i\{\eta^a_n \uparrow \tau^a (i \leq n \uparrow \infty) | x(\tau^a - 0) = \infty\} = 1 \quad (8)$$

2 一些引理

下面 5 个引理将在本文定理的证明中用到, 它们的证明可参见文 [2]. 其中引理 1 和引理 2 见 [2, 第五章 §2 引理 4 和引理 5], 引理 3 见 [2, 第六章 §8 定理 2], 引理 4 和引理 5 见 [2, 第十一章 §2 定理 2 和定理 3].

引理 1 设 $a \geq 0$, 则方程组

$$\begin{cases} -(a + b_0)u_0 + b_0u_1 = -f_0, \\ a_iu_{i-1} - (a_i + b_i)u_i + b_iu_{i+1} = -f_i, (0 < i < n), \\ u_n = f_n \end{cases} \quad (9)$$

的解是

$$u_i = \frac{z_n - z_i}{a(z_n - z_0) + 1} f_0 + \frac{a(z_i - z_0) + 1}{a(z_n - z_0) + 1} f_n + \frac{z_n - z_i}{a(z_n - z_0) + 1} \sum_{j=1}^{i-1} [a(z_j - z_0) + 1] f_j \mu_j$$

$$\frac{a(z_i - z_0) + 1}{a(z_n - z_0) + 1} \sum_{j=i}^{n-1} (z_n - z_j) f_j \mu_j \quad (10)$$

引理 2 设 $a \geq 0$, 则方程组

$$\begin{cases} -(a + b_0)u_0 + b_0u_1 = f_0 \\ a_iu_{i-1} - (a_i + b_i)u_i + b_iu_{i+1} = f_i (i > 0) \end{cases} \quad (11)$$

的解是

$$u_i = [a(z_i - z_0) + 1] u_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (z_i - z_j) f_j \mu_j \quad (12)$$

引理 3 设 $a \geq 0$, 集合 Λ 和非负随机变量 η^a 均 $\mathcal{F}_\infty^0$ -可测. 如果对指定的 i 有

$$P_i\{\Lambda = \theta_{\tau_1} \Lambda\} = P_i\{\eta^a = \tau_1 + \theta_{\tau_1} \eta^a\} = 1 \quad (13)$$

则 $u_j = E_j\{\eta^a, \Lambda\}, j \in E$ 满足方程

$$\sum_j q_{ij} u_j = -P_i\{\Lambda\} \quad (14)$$

注 1 文献 [2, 第六章 §8 定理 2] 中虽然没有明确叙述为对指定的 i , 但实际上对指定的 i 定理仍成立.

引理 4 设 $a \geq 0, i \leq k \leq n$, 则

$$\begin{aligned} P_k\{\eta^a_k < \eta^a_n\} &= \frac{z_n - z_k}{z_n - z_i}, \\ P_k\{\eta^a_k < \eta^a_i\} &= \frac{z_k - z_i}{z_n - z_i} \end{aligned} \quad (15)$$

引理 5 设 $a \geq 0, i \leq k$, 则

$$P_k\{\eta^a_i < \tau^a\} = \begin{cases} \frac{z - z_k}{z - z_i}, & z < \infty; \\ 1, & z = \infty \end{cases} \quad (16)$$

3 主要定理及证明

下面给出本文的主要结论: 定理 1—4. 限于篇幅, 只给出定理 1 的证明. 定理 2—4 的证明与定理 1 的证明方法类似.

定理 1 (向上性质) 设 $a \geq 0, n > 0, 0 \leq i \leq n$, 则

$$\begin{aligned} E_i\{\eta^a_n, \eta^a_i < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0\} &= \\ \frac{b_0}{a + b_0} \frac{z_n - z_i}{a(z_n - z_0) + 1} C_{1n}^a X_n^1 + \\ \frac{z_n - z_i}{a(z_n - z_0) + 1} X_n^1 \sum_{j=1}^{i-1} [a(z_j - z_0) + 1] C_{jn}^a \mu_j + \\ C_{in}^a X_n^1 \sum_{j=i}^{n-1} (z_n - z_j) C_{jn}^a \mu_j \end{aligned} \quad (17)$$

证明 设 $u_i = E_i\{\eta^a_n, \eta^a_i < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0\}$, 令 $\Lambda = (\eta^a_n < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0)$, $\eta^a = \eta^a_i$, 由于对 $i = 0$ 时引理 3 中 (13) 式不成立, 因此需直接计算

$$u_0 = E_0\{\eta^a_n, \eta^a_n < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0\} =$$

$$E_0\{\tau_1 + \theta_{\tau_1} \eta^a_n, \tau_1 < \tau^a, \theta_{\tau_1}(\eta^a_n < \tau^a)\},$$

$$\begin{aligned} & \theta_{\tau_1}(x(\tau^a - 0) = 0) \} = \\ & P(x(\tau_1) = 1) \circ E_0\{\tau_1 + \theta_{\tau_1} \eta_n^a, \theta_{\tau_1}(\eta_n^a < \tau^a), \\ & \theta_{\tau_1}(x(\tau^a - 0) = 0) \mid x(\tau_1) = 1\} = \\ & \frac{b_0}{a + b_0} \{ E_0[\tau_1, \theta_{\tau_1}(\eta_n^a < \tau^a), \\ & \theta_{\tau_1}(x(\tau^a - 0) = 0) \mid x(\tau_1) = 1] + \\ & E_0[\theta_{\tau_1} \eta_n^a, \theta_{\tau_1}(\eta_n^a < \tau^a), \\ & \theta_{\tau_1}(x(\tau^a - 0) = 0) \mid x(\tau_1) = 1)] \} \end{aligned}$$

由于在 $x(\tau_1)$ 之下, τ_1 前 σ 域与 τ_1 后 σ 域独立([2, 第 170 页第 3 行]), 故上式等于

$$\begin{aligned} & \frac{b_0}{a + b_0} [E_0 \tau_1 \circ P_1(\eta_n^a < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0) + \\ & E_1(\eta_n^a, \eta_n^a < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0)] = \\ & \frac{b_0}{a + b_0} \circ \\ & \left[\frac{1}{a + b_0} P_1(\eta_n^a < \tau^a, \theta_{\eta_n^a}(x(\tau^a - 0) = 0)) + u_1 \right] = \\ & \frac{b_0}{a + b_0} \circ \\ & \left[\frac{1}{a + b_0} P_1(\eta_n^a < \tau^a) P_n(x(\tau^a - 0) = 0) + u_1 \right] = \\ & \frac{b_0}{a + b_0} \left[\frac{1}{a + b_0} C_{in}^a X_n^1 + u_1 \right] \end{aligned}$$

(最后一个等式由 [3, 定理 1] 和 (6) 得到), 即

$$u_0 = \frac{b_0}{a + b_0} \left(\frac{1}{a + b_0} C_{in}^a X_n^1 + u_1 \right)$$

从而

$$-(a + b_0)u_0 + b_0u_1 = -\frac{b_0}{a + b_0} C_{in}^a X_n^1$$

对于 $0 < i < n$, 由于

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\eta_n^a < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0) \subset (\tau_1 < \tau^a), \\ \eta^a &= \eta_n^a = \tau_1 + \theta_{\tau_1} \eta_n^a = \tau_1 + \theta_{\tau_1} \eta^a \end{aligned}$$

因此

$$P_i(\Lambda = \theta_{\tau_1} \Lambda) = P_i(\eta^a = \tau_1 + \theta_{\tau_1} \eta^a) = 1$$

即引理 3 中 (13) 式成立, 故由引理 3 得

$$\begin{aligned} f_i &= P_i(\Lambda) = P_i(\eta_n^a < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0) = \\ & P_i(\eta_n^a < \tau^a, \theta_{\eta_n^a}(x(\tau^a - 0) = 0)) = \end{aligned}$$

$$P_i(\eta_n^a < \tau^a) \circ P_n(x(\tau^a - 0) = 0) = C_n^a X_n^1$$

(最后一个等式由 [3, 定理 1] 和 (6) 得到), 又

$$u_n = E_n\{\eta_n^a, \eta_n^a < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0\} = 0$$

故 u_i 满足

$$f_0 = \frac{b_0}{a + b_0} C_{in}^a X_n^1,$$

$$f_i = C_{in}^a X_n^1 (0 < i < n), \quad f_n = 0$$

的引理 1 中的方程 (9)。由引理 1 和 (10) 式得 (17) 式成立。

注 2 在定理 1 中, 特别地, 当 $n = i + 1$ 时, 有如下推论。

推论 1 设 $a \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} E_i\{\eta_{i+1}^a, \eta_{i+1}^a < \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0\} &= \\ \frac{b_0}{a + b_0} \frac{z_{i+1} - z_i}{a(z_{i+1} - z_0) + 1} C_{i+1}^a X_{i+1}^1 + \\ \frac{z_{i+1} - z_i}{a(z_{i+1} - z_0) + 1} X_{i+1}^1 \sum_{j=1}^i [a(z_j - z_0) + 1] C_{j+1}^a \mu_j \end{aligned} \tag{18}$$

定理 2(向上性质) 设 $a \geq 0, n > 0, 0 \leq i \leq n$, 则

$$\begin{aligned} E_i\{\eta_n^a, \eta_n^a < \eta_n^a < \tau^a\} &= \\ \frac{b_0(z_n - z_i)(z_n - z_1)}{(a + b_0)[a(z_n - z_0) + 1](z_n - z_0)} C_{0n}^a + \\ \frac{z_n - z_i}{[a(z_n - z_0) + 1](z_n - z_0)} \circ \\ C_{0n}^a \sum_{j=1}^{i-1} [a(z_j - z_0) + 1](z_n - z_j) \mu_j + \\ \frac{1}{z_n - z_0} C_{in}^a C_{0n}^a \sum_{j=i}^{n-1} (z_n - z_j)^2 \mu_j \end{aligned} \tag{19}$$

特别地, 当 $a = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} E_i\{\eta_n^0, \eta_n^0 < \eta_n^0 < \tau^0\} &= \frac{(z_n - z_i)(z_n - z_1)}{z_n - z_0} + \\ \frac{z_n - z_i}{z_n - z_0} \sum_{j=1}^{i-1} (z_n - z_j) \mu_j + \frac{1}{z_n - z_0} \sum_{j=i}^{n-1} (z_n - z_j)^2 \mu_j \end{aligned} \tag{20}$$

证明 设 $u_i = E_i\{\eta_n^a, \eta_n^a < \eta_n^a < \tau^a\}$, $\Lambda = (\eta_n^a < \eta_n^a < \tau^a)$, $\eta^a = \eta_n^a$ 。这里用类似于定理 1 中的证明方法可得 (19) 和 (20) 式成立。

注 3 在定理 2 中, 特别地, 当 $n = i + 1$ 时, 有如下推论。

推论 2 设 $a \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} E_i\{\eta_{i+1}^a, \eta_{i+1}^a < \eta_{i+1}^a < \tau^a\} &= \\ \frac{b_0(z_{i+1} - z_i)(z_{i+1} - z_1)}{(a + b_0)[a(z_{i+1} - z_0) + 1](z_{i+1} - z_0)} C_{0i+1}^a + \\ \frac{z_{i+1} - z_i}{[a(z_{i+1} - z_0) + 1](z_{i+1} - z_0)} \circ \\ C_{0i+1}^a \sum_{j=1}^i [a(z_j - z_0) + 1](z_{i+1} - z_j) \mu_j \end{aligned} \tag{21}$$

特别地, 当 $a = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} E_i\{\eta_{i+1}^0, \eta_{i+1}^0 < \eta_{i+1}^0 < \tau^0\} &= \\ \frac{(z_{i+1} - z_i)(z_{i+1} - z_1)}{z_{i+1} - z_0} + \frac{z_{i+1} - z_i}{z_{i+1} - z_0} \sum_{j=1}^i (z_{i+1} - z_j) \mu_j \end{aligned} \tag{22}$$

定理 3(向上性质) 设 $a \geq 0, n > 0, 0 \leq i \leq n$,

则

$$E_i \{ \eta_n^a, \eta_n^a < \tau^a \} = \frac{b_0}{a+b_0} \frac{z_n - z_i}{a(z_n - z_0) + 1} C_{in}^a + \frac{z_n - z_i}{a(z_n - z_0) + 1} \sum_{j=1}^{i-1} [a(z_j - z_0) + 1] C_{jn}^a \mu_j + C_{in}^a \sum_{j=i}^{n-1} (z_n - z_j) C_{jn}^a \mu_j \quad (23)$$

特别地, 当 $a = 0$ 时, 有

$$E_i \{ \eta_n^0, \eta_n^0 < \tau^0 \} = (z_n - z_i) \sum_{j=0}^{i-1} \mu_j + \sum_{j=i}^{n-1} (z_n - z_j) \mu_j \quad (24)$$

证明 设 $u_i = E_i \{ \eta_n^a, \eta_n^a < \tau^a \}$, $\Lambda = (\eta_n^a < \tau^a)$, $\eta^a = \eta_n^a$ 。这里用类似于定理 2 中的证明方法可得 (23) 和 (24) 式成立。

注 4 在定理 3 中, 特别地, 当 $n = i + 1$ 时, 有如下推论。

推论 3 设 $a \geq 0$, 则

$$E_i \{ \eta_{i+1}^a, \eta_{i+1}^a < \tau^a \} = \frac{b_0}{a+b_0} \frac{z_{i+1} - z_i}{a(z_{i+1} - z_0) + 1} C_{i+1}^a + \frac{z_{i+1} - z_i}{a(z_{i+1} - z_0) + 1} \sum_{j=1}^i [a(z_j - z_0) + 1] C_{ji+1}^a \mu_j$$

特别地, 当 $a = 0$ 时, 有

$$E_i \{ \eta_{i+1}^0, \eta_{i+1}^0 < \tau^0 \} = (z_{i+1} - z_i) \sum_{j=0}^i \mu_j \quad (26)$$

定理 4 (向上性质) 设 $a \geq 0$, $i \geq 0$, 则

(I) 当 $az < \infty$ 时, 有

$$E_0 \{ \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0 \} = \frac{1}{a+b_0} X_0^1 + \frac{b_0}{a+b_0} [a(z - z_0) + 1] X_1^1 + \frac{1}{a(z - z_0) + 1} \sum_{j=1}^{\infty} (z - z_j) X_j^1 \mu_j \quad (27)$$

$$E_i \{ \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0 \} =$$

$$\frac{1}{a+b_0} X_i^1 + \frac{b_0}{a+b_0} X_i^1 [X_i^2 - (z_i - z_0)] + X_i^2 \sum_{j=1}^{\infty} (z - z_j) X_j^1 \mu_j - \sum_{j=1}^{i-1} (z_i - z_j) X_j^1 \mu_j \quad (28)$$

特别地, 当 $a = 0$ 时, 有

$$E_0 \{ \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0 \} = 0, \\ E_i \{ \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0 \} = 0 \quad (29)$$

(II) 当 $az = \infty$ 时, 有

$$E_0 \{ \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0 \} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \quad (30)$$

$$E_i \{ \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0 \} = \frac{a(z_i - z_0) + 1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j - \sum_{j=0}^{i-1} (z_i - z_j) \mu_j \quad (31)$$

证明 设 $u_i = E_i \{ \tau^a, x(\tau^a - 0) = 0 \}$, $\Lambda = (x(\tau^a - 0) = 0)$, $\eta^a = \tau^a$ 。用类似于定理 3 中的证明方法可得 (27) — (31) 式成立。

致谢: 衷心感谢杨向群、郭先平教授的热情鼓励与大力支持!

参考文献:

- [1] 王梓坤. 随机过程通论(上、下卷)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1996.
- [2] 杨向群. 可列马尔可夫过程构造论[M]. 第 2 版. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1986.
- [3] 朱全新, 杨向群. 以 0 为反射壁和拟飞射壁的生灭过程的特征数[J]. 湖南师范大学学报(研究生论文专辑), 2002, 31(5): 283—286.
- [4] 杨向群. 生灭过程爆发后的存活时间分布[J]. 中国科学(A), 1998, 28(1): 30—35.

Some Properties of Two Kinds of Birth and Death Processes before Explosions

ZHU Quan xin, DAI Yong long

(Department of Mathematics Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: This paper deals with some upward properties of two kinds of birth and death processes with state 0 as their reflecting and quasi leap reflecting barriers before explosions. By proposing a system of infinite dimensional linear equations and shift operator, we obtain some precise expressions of average time when the processes move from state i to state n ($i \leq n \leq \infty$) in several cases. Moreover, some previous results are special cases of this paper.

Key words: Q^a process; birth and death process; reflecting barrier; quasi leap reflecting barrier; before explosion