

具有声学边界条件的非线性波动方程的整体解^{*}

郭 艾, 崔尚斌

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究具有声学边界条件的非线性波动方程初边值问题, 得到整体强解的存在惟一性。

关键词: 非线性波动方程; 声学边界条件; 整体解; 存在惟一性; 先验估计

中图分类号: O175.2 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2004) 04-0005-05

本文研究具有声学边界条件的初边值问题:

$$u_{tt} - M(\|u\|_2^2) \Delta u + \eta |u_t|^\alpha u_t = \mu |u|^\beta u, \quad t \geq 0, x \in \Omega \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_0} = 0, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$$(\rho u_t + f \delta + g \delta + h \delta)|_{\Gamma_1} = 0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta \right]_{\Gamma_1} = 0, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \Omega \quad (5)$$

其中, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, Γ_0 为 $\partial\Omega$ 的可测子集, 且 $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, ν 为 Γ_1 的单位外法向量。事实上声波在具有声学媒介的区域中传播时, 区域的边界上具有弹性的这部分 Γ_1 在受到波动的压力下会产生振动, 可表示为:

$$(\rho u_t + f \delta + g \delta + h \delta)|_{\Gamma_1} = 0$$

其中, δ 表示时刻在 t 边界点 x 对边界的法线方向的位移, ρ 表示介质密度。对于问题(1)至(5), Ikehata 等^[1,2] 研究了当 $M(s) = 1$ 且 Γ_1 是空集时解的存在与爆破, Matsuyama 等^[3,4] 对 $M(s)$ 中 $s = \|\nabla u\|_2^2$ 且 Γ_1 是空集时解的整体存在与能量衰减做了研究, Frota^[5] 对 $\mu = 0$ 的情形解的整体存在性做了研究。本文证明问题(1)至(5)整体解的存在性和惟一性。

在文中假设:

① ρ, η, μ 为常数, 且 $\rho > 0, \eta > 0, \mu \geq 0$;

② $f(x), g(x), h(x)$ 为 Γ_1 上的连续实函数, 且 $f(x) > 0, g(x) \geq 0, h(x) > 0$;

③ $M \in C^1([0, \infty); \mathbf{R}), 0 < m_0 \leq M(s) \leq m_1(1 + s^{r/2}), r = \frac{2(\alpha - \beta)}{\alpha + 2}, \frac{|M'(s)s^{1/2}|}{M(s)} \leq k_0, \forall s \geq 0$ 。

其中, m_0, m_1, k_0 为常数。

定理1 令 $\alpha > 1, \beta < \alpha, \frac{1}{4} \leq \beta \leq \infty (n = 1, 2), \frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{2}{n-2} (n = 3, 4), 0 \leq \beta \leq \frac{2}{n-1} (n \geq 5)$, $u_0 \in V \cap L^{2\beta+2}(\Omega), u_1 \in V \cap L^{\alpha+2}(\Omega)$, 且假设①—③成立, 则问题(1)至(5)存在一组强解 $(u(x, t), \delta(x, t))$, 对 $\forall T > 0$ 满足:

$$u \in L^\infty(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; L^{\beta+2}(\Omega)), u \in H^1(\Delta, \Omega) \text{ 几乎处处于 } [0, T],$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; V) \cap L^{\alpha+2}(0, T; L^{\alpha+2}(\Omega)), u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \delta, \delta', \delta'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1))$$

特别地当 $1 < \alpha < \infty (n = 1, 2), 1 < \alpha \leq 2 (n = 3)$ 时解是惟一的。

其中

$$V = \{u \in H^1(\Omega); u|_{\Gamma_0} = 0\}, \|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|, \text{ 记 } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \|\cdot\|,$$

* 收稿日期: 2003-09-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171112); 华南理工大学自然科学基金资助项目(121-E52010)

作者简介: 郭艾(1964年生), 女, 博士生, 副教授。现在华南理工大学应用数学系工作; E-mail: guoai@scut.edu.cn

$$H(\Delta, \Omega) = \{ u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega) \}, \| u \|_{H(\Delta, \Omega)} = (\| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \Delta u \|^2)^{1/2}.$$

1 构造近似解

用 $\{ w_j \}_{j \in \mathbb{N}}, \{ z_j \}_{j \in \mathbb{N}}$ 分别表示空间 V 与 $L^2(\Gamma)$ 的规范正交基, 构造问题(1) 至(5) 的近似解序列如下:

$$u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m \zeta_m(t) w_j(x), x \in \Omega, t \in [0, T_m]$$
$$\hat{\phi}_m(x, t) = \sum_{j=1}^m \beta_{jm}(t) z_j(x), x \in \Gamma, t \in [0, T_m]$$

对每个自然数 m 考虑下列微分方程的初值问题:

$$(\rho u_{mt}, w_j) + M(\| u_m \|^2)((\nabla u_m, \nabla w_j) - (\hat{\phi}_m, \gamma_0(w_j))_\Gamma) + \eta(\| u_m \|^{\alpha} u_m, w_j) = \mu(\| u_m \|^{\beta} u_m, w_j)$$
$$(\rho \gamma_0(u_{mt}) + f \hat{\phi}_{mt} + g \hat{\phi}_m + h \hat{\phi}_m, z_j)_\Gamma = 0, 1 \leq j \leq m,$$
$$u_m(0, x) = u_{0m}, u_{mt}(0, x) = u_{1m}, \hat{\phi}_m(0, x) = \hat{\phi}_0, \hat{\phi}_{mt}(0, x) = \gamma_1(u_{0m})$$

这里, $\hat{\phi}_0 \in L^2(\Gamma), u_{0m} = \sum_{j=1}^m (u_0, w_j) w_j(x), u_{1m} = \sum_{j=1}^m (u_1, w_j) w_j(x), \gamma_0(\cdot) = \cdot|_\Gamma, \gamma_1(\cdot) = \frac{\partial \cdot}{\partial \nu}|_\Gamma, 0 \leq T_m \leq T$. 因此近似解满足方程:

$$\frac{(\rho u_{mt}, w)}{M(\| u_m \|^2)} + ((\nabla u_m, \nabla w) - (\hat{\phi}_m, \gamma_0(w))_\Gamma) + \eta \frac{(\| u_m \|^{\alpha} u_m, w)}{M(\| u_m \|^2)} = \mu \frac{(\| u_m \|^{\beta} u_m, w)}{M(\| u_m \|^2)} \tag{6}$$

$$(\gamma_0(u_{mt}), z)_\Gamma = -\frac{1}{\rho}(f \hat{\phi}_{mt} + g \hat{\phi}_m + h \hat{\phi}_m, z)_\Gamma \tag{7}$$

其中, $w \in \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}, z \in \text{span}\{z_1, \dots, z_m\}$. 由 Picard 迭代及常微分方程的理论可得式(6) 和式(7) 解的局部存在性. 下面通过先验积分估计, 证明 $u_m(x, t), \hat{\phi}_m(x, t)$ 的整体存在性.

2 先验估计

在本节中用 $\| \cdot \|_q$ 表示 $\| \cdot \|_{L^q(\Omega)}$, 用 M 表示 $M(\| u_m \|^2)$, 用 $\| \cdot \|_\Gamma$ 表示 $\| \cdot \|_{L^2(\Gamma)}$, 用 $C, C(T)$ 分别表示常数和与 T 有关的非负常数, 它们在不同的位置可以表示不同的值.

引理 1 在定理 1 的假设下, 有估计式

$$\| u_{mt} \| + \| u_m \|_V + \| \hat{\phi}_{mt} \|_\Gamma + \| \hat{\phi}_m \|_\Gamma + \| u_m \|_{\beta+2} + \int_0^t \| u_{mt} \|_{\frac{\alpha+2}{\alpha+2}} dt \leq C(T)$$

证明 在 (6) 中令 $w = 2u_{mt}$, 在(7) 式中令 $z = 2\hat{\phi}_{mt}$ 得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho \| u_{mt} \|^2}{M} + \rho \| u_m \|_V^2 + \| f^{1/2} \hat{\phi}_{mt} \|^2_\Gamma + \| h^{1/2} \hat{\phi}_m \|^2_\Gamma + \| u_m \|_{\beta+2}^{\beta+2} \right) + \frac{2\rho\eta \| u_{mt} \|_{\frac{\alpha+2}{\alpha+2}}^{\alpha+2}}{M} =$$
$$- \frac{2\rho M'}{M^2} (u_{mt}, u_m) \| u_{mt} \|^2 + \left(\frac{2\mu}{M} + \beta + 2 \right) (\| u_m \|^{\beta} u_m, u_{mt}) - \| g^{1/2} \hat{\phi}_{mt} \|^2_\Gamma \tag{8}$$

因为 $\alpha > 1$ 由 Sobolev 嵌入定理以及 Young 不等式得

$$\left| \frac{2\rho M'}{M^2} (u_{mt}, u_m) \| u_{mt} \|^2 \right| \leq C \frac{\| u_{mt} \|^3}{M} \leq \epsilon \frac{\| u_{mt} \|_{\frac{\alpha+2}{\alpha+2}}^{\alpha+2}}{M} + C$$

由 Höld 不等式以及 Young 不等式得

$$\left(\frac{2\mu}{M} + \beta + 2 \right) (\| u_m \|^{\beta} u_m, u_{mt}) \leq C \| u_m \|_{\beta+2}^{\beta+2} + \epsilon \| u_{mt} \|_{\beta+2}^{\beta+2} + C$$

因为 $0 < m_0 \leq M(s) \leq m_1(1 + s^{\frac{r}{2}}), r = \frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha+2}, \alpha > \beta$ 所以有

$$\epsilon \| u_{mt} \|_{\beta+2}^{\beta+2} = \epsilon \frac{\| u_{mt} \|_{\beta+2}^{\beta+2} (1 + \| u_m \|^r)}{1 + \| u_m \|^r} \leq$$
$$C \| u_m \|_V^2 + \epsilon m_1 c \frac{\| u_{mt} \|_{\frac{\alpha+2}{\alpha+2}}^{\alpha+2}}{M} + \epsilon \epsilon_0 m_1 c_0 \frac{\| u_{mt} \|_{\frac{\alpha+2}{\alpha+2}}^{\alpha+2}}{M} + C$$

这里, c, c_0 是与 ϵ, ϵ_0 无关而与 Ω, α, β 有关的常数. 将上面不等式代入(8) 式, 取 ϵ, ϵ_0 适当小, 使得 $2\rho\eta - \epsilon - \epsilon m_1 c - \epsilon \epsilon_0 m_1 c_0 = C > 0$, 得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho \|u_{mt}\|^2}{M} + \rho \|u_m\|_\nu^2 + \|f^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{mt}\|_r^2 + \|h^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{mt}\|_r^2 + \|u_m\|_{\beta+2}^{\beta+2}\right) + C \frac{\|u_{mt}\|^{\alpha+2}}{M} \leqslant$$
$$C(\|u_m\|_{\beta+2}^{\beta+2}) + \|u_m\|_\nu^2 + \|g^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{mt}\|_r^2 + C$$

对上式关于 t 从 0 到 $t \leqslant T_m$ 积分, 由 Cauchy 不等式得到

$$\frac{\rho \|u_{mt}\|^2}{M} + \rho \|u_m\|_\nu^2 + \|\hat{\phi}_{mt}\|_r^2 + \|\hat{\phi}_{mt}\|_r^2 + \|u_m\|_{\beta+2}^{\beta+2} + C \int_0^t \frac{\|u_{mt}\|^{\alpha+2}}{M} dt \leqslant$$
$$C \int_0^t (\|u_m\|_{\beta+2}^{\beta+2} + \|u_m\|_\nu^2 + \|\hat{\phi}_{mt}\|_r^2) dt + C(T)$$

对上式利用 Gronwall 不等式得到

$$\|u_m\|_{\beta+2}^{\beta+2} + \|u_m\|_\nu^2 + \|\hat{\phi}_{mt}\|_r^2 \leqslant C(T)$$

因此

$$\|u_{mt}\| + \|u_m\|_\nu + \|\hat{\phi}_{mt}\|_r + \|\hat{\phi}_{mt}\|_r + \|u_m\|_{\beta+2} + \int_0^t \|u_{mt}\|^{\alpha+2} dt \leqslant C(T)$$

引理 2 在定理 1 的假设下, 有估计式

$$\|u_{mt}\| + \|u_{mt}\|_\nu + \|\hat{\phi}_{mt}\|_r \leqslant C(T)$$

证明 在式 (6) 和式 (7) 中令 $t = 0$, 取 $w = u_{mt}(0, x)$, $z = \hat{\phi}_{mt}(0, x)$ 得到

$$\|u_{mt}(0, x)\|^2 \leqslant (M(\|u_{0m}\|^2) \|\Delta u_{0m}\| + \eta \|u_{1m}\|_{\frac{\alpha+1}{2\alpha+2}}^{\alpha+1} + \mu \|u_{0m}\|_{\frac{\beta+2}{2\beta+2}}^{\beta+2}) \|u_{mt}(0, x)\|,$$
$$\|\hat{\phi}_{mt}(0, x)\|_r^2 \leqslant C(1 + \|u_{0m}\|_{H^2(\Omega)} + \|u_{1m}\|_{H^1(\Omega)}) \|\hat{\phi}_{mt}(0, x)\|_r$$

故

$$\|u_{mt}(0, x)\| + \|\hat{\phi}_{mt}(0, x)\| \leqslant C \tag{9}$$

在式 (6) 与式 (7) 分别代入 t 和 $t + \Delta t$, ($0 < \Delta t < T - t$), 做差, 并取 $w = (u_{mt}(t + \Delta t, x) - u_{mt}(t, x))$, $z = (\hat{\phi}_{mt}(t + \Delta t, x) - \hat{\phi}_{mt}(t, x))$, 等式两边同除以 Δt^2 , 且令 $\Delta t \rightarrow 0$ 得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho \|u_{mt}\|^2}{M} + \rho \|u_{mt}\|_\nu^2 + \|f^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{mt}\|_r^2 + \|h^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{mt}\|_r^2\right) + \frac{2\rho(\alpha+1)\eta(|u_{mt}|^\alpha, u_{mt}^2)}{M} =$$
$$\frac{2\rho\mu(\beta+1)}{M^2} \int_\Omega |u_m|^\beta u_{mt} u_{mt} dx - \frac{\mu M'}{M^2} 2(u_{mt}, u_m)(|u_m|^\beta u_m, 2u_{mt}) +$$
$$\frac{2\rho M'}{M^2} (u_{mt}, u_m) \|u_{mt}\|^2 + \frac{4\rho\eta M'}{M} (u_{mt}, u_m)(|u_{mt}|^\alpha u_{mt}, u_{mt}) - 2\|g^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{mt}\|_r^2 \tag{10}$$

注意到

$$\frac{2\rho(\alpha+1)\eta(|u_{mt}|^\alpha, u_{mt}^2)}{M} \geqslant \frac{2\rho(\alpha+1)\eta(|u_{mt}|^\alpha, u_{mt}^2)}{m_1} \geqslant 0,$$
$$\frac{2\rho M'}{M^2} (u_{mt}, u_m) \|u_{mt}\|^2 \leqslant C(T) \|u_{mt}\|^2,$$
$$\frac{4\rho\eta M'}{M} (u_{mt}, u_m)(|u_{mt}|^\alpha u_{mt}, u_{mt}) \leqslant \epsilon(|u_{mt}|^\alpha, u_{mt}^2) + C\|u_{mt}\|_{\alpha+2}^{\alpha+2},$$
$$\|g^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}_{mt}\|_r^2 \leqslant \|\hat{\phi}_{mt}\|_r^2$$

当 $n = 1, 2$ 且时 $1/4 \leqslant \beta < \infty$ 时

$$\frac{2\rho\mu(\beta+1)}{M} \int_\Omega |u_m|^\beta u_{mt} u_{mt} dx \leqslant \|u_{mt}\|^2 + \int_\Omega u_m^{2\beta} u_{mt}^2 dx \leqslant \|u_{mt}\|^2 + \|u_m\|_{\frac{4\beta}{3}}^{4\beta} + \|u_{mt}\|_4^4$$

利用 Sobolev 嵌入定理得到

$$\|u_m\|_{\frac{4\beta}{3}}^{4\beta} \leqslant C\|u_m\|_\nu^{4\beta}, n = 1, 2 \quad 1/4 \leqslant \beta < \infty$$

利用 Gagliardo Nirenberg 不等式得到

$$\|u_{mt}\|_4^4 \leqslant C(\|u_{mt}\|_\nu^2 + \|u_m\|_2^3)$$

当 $n = 3, 4$ 且 $\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{2}{n-2}$ 时利用 Höld 不等式得到

$$\frac{2\rho\mu(\beta+1)}{M} \int_\Omega |u_m|^\beta u_{mt} u_{mt} dx \leqslant C\|u_{mt}\| \|u_m\|_{\frac{\beta}{\beta\alpha}}^\beta \|u_{mt}\|_b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

可以取适当的 a, b , 使其满足

$$\frac{1}{\beta\alpha} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{b} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

利用 Sobolev 嵌入定理及引理 1 得到

$$\|u_{mt}\| \|u_m\|_{\beta\alpha}^\beta \|u_{mt}\|_b \leq \|u_{mt}\| \|u_m\|_{\beta}^\beta \|u_{mt}\|_V \leq C(T) (\|u_{mt}\|_V^2 + \|u_{mt}\|^2)$$

当 $n \geq 5$ 且 $0 \leq \beta \leq \frac{2}{n-1}$ 时利用 Hold 不等式得到

$$\frac{2\rho\mu(\beta+1)}{M} \int_{\Omega} |u_m|^\beta u_{mt} u_{mt} dx \leq C \|u_{mt}\| \|u_m\|_{\beta+2}^\beta \|u_{mt}\|_b, b = \frac{2(2+\beta)}{2-\beta} \leq \frac{2n}{n-2}$$

利用 Sobolev 嵌入定理及引理 1 得到

$$\|u_{mt}\| \|u_m\|_{\beta+2}^\beta \|u_{mt}\|_b \leq C(T) (\|u_{mt}\|_V^2 + \|u_{mt}\|^2)$$

综上所述, 当 $n = 1, 2, 1/4 \leq \beta < \infty$ 当 $n = 3, 4, 1/2 \leq \beta \leq 2/(n-2)$, 当 $n \geq 5, 0 \leq \beta \leq 2/(n-1)$ 时有

$$\frac{2\rho\mu(\beta+1)}{M} \int_{\Omega} |u_m|^\beta u_{mt} u_{mt} dx \leq C(T) (\|u_{mt}\|_V^2 + \|u_{mt}\|^2 + 1)$$

利用引理 1 与 Sobolev 嵌入定理得到

$$-\frac{\mu M'}{M^2} 2(u_{mt}, u_m) (|u_m|^\beta u_{mt}, 2u_{mt}) \leq C(T) (\|u_{mt}\|_{\beta+2}^{2\beta+2} + \|u_{mt}\|^2) \leq C(T) (1 + \|u_{mt}\|^2)$$

将上述不等式代入 (10) 式, 取 ϵ 充分小得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho \|u_{mt}\|^2}{M} + \rho \|u_{mt}\|_V^2 + \|f^{1/2} \hat{q}_{mt}\|_r^2 + \|h^{1/2} \hat{q}_u\|_r^2 \right) \leq C(T) (\|u_{mt}\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} + \|u_{mt}\|_V^2 + \|u_{mt}\|^2 + \|\hat{q}_{mt}\|^2 + 1)$$

对上式关于 t 于从 0 到 $t \leq T_m$ 积分, 利用(9) 与(10) 式由 Gronwall 不等式得到

$$\|u_{mt}\| + \|u_{mt}\|_V + \|\hat{q}_{mt}\|_r \leq C(T)$$

3 定理 1 的证明

由引理 1 与引理 2 知, 存在 $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\hat{q}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 的子列 $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\hat{q}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, 使得

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u \text{ 于 } L^\infty(0, T; V) * \text{弱收敛}, u_m \rightarrow u \text{ 于 } L^\infty(0, T; L^{\beta+2}(\Omega)) * \text{弱收敛}, \\ u_{mt} &\rightharpoonup u_t \text{ 于 } L^\infty(0, T; V) * \text{弱收敛}, u_{mt} \rightarrow u_t \text{ 于 } L^{\alpha+2}(0, T; L^{\alpha+2}(\Omega)) \text{弱收敛}, \\ u_{mt} &\rightharpoonup u_{tt} \text{ 于 } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) * \text{弱收敛}, \hat{q}_m \rightarrow \hat{q} \text{ 于 } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)) * \text{弱收敛}, \\ \hat{q}_{mt} &\rightharpoonup \hat{q}_t \text{ 于 } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)) * \text{弱收敛}, \hat{q}_{mt} \rightarrow \hat{q}_t \text{ 于 } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)) * \text{弱收敛} \end{aligned}$$

由于嵌入算子 $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ 是完全连续的, 由紧嵌入定理得到

$$u_m \rightarrow u \text{ 于 } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{强收敛}, u_{mt} \rightarrow u_t \text{ 于 } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{强收敛}$$

因此 $u(x, t), \hat{q}(x, t)$ 为问题(1)–(5) 的整体强解. 下面证明解的惟一性.

设 $u_1(t, x), \hat{q}_1(t, x), u_2(t, x), \hat{q}_2(t, x)$ 为问题(1)–(5) 的 2 组解, 令

$$u = u_1(t, x) - u_2(t, x), \hat{q} = \hat{q}_1(t, x) - \hat{q}_2(t, x)$$

取 $w = 2u_t, z = 2\hat{q}$ 得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho \|u_t\|^2}{M(\|u_1\|)} + \rho \|u\|_V^2 + \|f^{1/2} \hat{q}\|_r^2 + \|h^{1/2} \delta\|_r^2 \right) + 2\rho\eta \frac{(|u_1|^\alpha u_1 - |u_2|^\alpha u_2, u_t)}{M(\|u_1\|^2)} = \\ &-2\|g^{1/2} \hat{q}\|_r^2 + 2\rho\eta \frac{M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)}{M(\|u_1\|^2)M(\|u_2\|^2)} (|u_{2t}|^\alpha u_{2t}, u_t) + 2\rho \frac{M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)}{M(\|u_1\|^2)M(\|u_2\|^2)} (u_{2t}, u_t) - \\ &2\rho \frac{M'(\|u_1\|^2)}{M(\|u_1\|^2)} (u_{1t}, u_1) \|u_t\|^2 + 2\rho\mu \frac{(|u_1|^\beta u_1 - |u_2|^\beta u_2, u_t)}{M(\|u_1\|^2)} + \\ &2\rho\mu \frac{M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)}{M(\|u_1\|^2)M(\|u_2\|^2)} (|u_2|^\beta u_2, u_t) \end{aligned} \tag{11}$$

因为

$$2\rho\eta \frac{(|u_1|^\alpha u_1 - |u_2|^\alpha u_2, u_t)}{M(\|u_1\|^2)} = 2\rho\eta \frac{(|u_1 + \theta(u_2 - u_1)|^\alpha \|u_t\|^2)}{M(\|u_1\|^2)} \geq 0$$

$$\begin{aligned} & -2\|g^{\frac{1}{2}}\hat{\varphi}\|_{\Gamma}^2\leq C\|\hat{\varphi}\|_{\Gamma}^2, \\ & 2\rho\mu\frac{M(\|u_1\|^2)-M(\|u_2\|^2)}{M(\|u_1\|^2)M(\|u_2\|^2)}(|u_{2t}|^au_{2t},u_t)\leq C(\|u\|_{\nu}^2+\|u_t\|^2) \\ & 2\rho\frac{M(\|u_1\|^2)-M(\|u_2\|^2)}{M(\|u_1\|^2)M(\|u_2\|^2)}(u_{2tt},u_t)-2\rho\frac{M'(\|u_1\|^2)}{M(\|u_1\|^2)}(u_{1t},u_1)\|u_t\|^2\leq C(\|u\|_{\nu}^2+\|u_t\|^2) \\ & 2\rho\mu\frac{(|u_1|^{\beta}u_1-\|u_2\|^{\beta}u_2,u_t)}{M(\|u_1\|^2)}\leq C(\|u\|_{\nu}^2+\|u_t\|^2) \\ & 2\rho\mu\frac{M(\|u_1\|^2)-M(\|u_2\|^2)}{M(\|u_1\|^2)M(\|u_2\|^2)}(|u_2|^{\beta}u_2,u_t)\leq C(\|u\|_{\nu}^2+\|u_t\|^2) \end{aligned}$$

其中, a, b, β 的取值与前面相同. 将这些估计代入 (11) 式并对 t 从 0 到 t 积分, 利用 u, δ 满足的齐次初始条件, 由 Gronwall 不等式得到

$$\|u_t\|^2+\|u_t\|_{\nu}^2+\|\hat{\varphi}\|_{\Gamma}^2+\|\hat{\varphi}\|_{\Gamma}^2=0$$

所以 $u_1(t,x)=u_2(t,x)$, $\hat{\varphi}(t,x)=\hat{\varphi}_2(t,x)$, 惟一性得证.

参考文献:

[1] Ikehata R. Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms[J] . Nonlinear Anal, 1996, 27: 1165—1175.

[2] TODOROVA G. Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms[J] . Nonlinear Anal. 2000, 41: 891—905.

[3] MATSUYAMA T. On global solutions and energy decay for the wave equations of kirchhoff type with nonlinear damping terms[J] . J Math Anal Appl, 1996, 204: 729—753.

[4] ZUAZUA E. Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unboundary domains[J] . J Math pures et appl, 1991, 70: 513—529.

[5] FROTA C L. Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions[J] . J Diff Eq, 2000, 164: 92—109.

Global Solution for the Nonlinear Wave Equations
with Acoustic Boundary Conditions

GUO Ai, CUI Shang bin

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence and uniqueness of global solution for the nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions are obtained.

Key words: nonlinear wave equations; acoustic boundary conditions; global solution; existence and uniqueness; priori estimate