

中点局部 K 一致凸性和 φ -一直和^{*}

冼 军, 黎永锦, 赵志红
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 将中点局部一致凸性推广到中点局部 K 一致凸, 并且讨论了它们之间的关系. 主要研究的问题为: 假定 X, Y 都具有中点局部一致凸性或中点局部 K 一致凸性, 那么 $X \oplus_p Y$ ($1 < p < \infty$) 或 φ -一直和 $X \oplus_\varphi Y$ 是否仍具有中点局部一致凸性与中点局部 K 一致凸性.

关键词: 中点局部 K 一致凸性; 局部 K 一致凸性; K 一致凸性; K 严格凸性; φ -一直和

中图分类号: O177.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 06-0001-04

对凸性的研究是 Banach 空间理论的经典主题, 许多有价值的结果都可以在文[1]中找到. 凸性研究的一个重要方面就是“遗传性”, 如 X, Y 具有某种凸性, 那么 l_p 和 $X \oplus_p Y$ 也具有相同的凸性^[2]. 最近, K. S. Saito 和 M. Kato^[3,4]研究了严格凸与一致凸对于 φ -一直和 $X \oplus_\varphi Y$ 的遗传性并得到了很好的结果.

本文的主要目的是将中点局部一致凸性推广到中点局部 K 一致凸性, 并讨论 $X \oplus_p Y$ 与 $X \oplus_\varphi Y$ 的遗传性.

1 定义和引理

设 X, Y 为 Banach 空间, $S(X)$ 为单位球面, $U(X)$ 为闭单位球. φ 为定义在 $[0, 1]$ 上的连续凸函数, 且满足 $\varphi(0) = \varphi(1) = 1, \max\{1-t, t\} \leq \varphi(t) \leq 1 (0 \leq t \leq 1)$, 用 Ψ 记这种函数全体. K. S. Saito 和 M. Kato [3] 用 $X \oplus_\varphi Y$ 记 $X \oplus_p Y$ 且范数为

$$\|(x, y)\|_\varphi = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\varphi, (x, y) \in X \oplus Y.$$

对任意 $\varphi \in \Psi$, 有

$$\|(z, w)\|_\varphi = \begin{cases} (\|z\| + \|w\|)\varphi\left(\frac{\|w\|}{\|z\| + \|w\|}\right), & (z, w) \neq (0, 0) \\ 0, & (z, w) = (0, 0) \end{cases}$$

$X \oplus_p Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y, \|(x, y)\| = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} < \infty\}$. 不难证明 $(X \oplus_p Y)^* = X^* \oplus_q Y^*$, 其中 p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 如果 $x_1, \dots, x_{k+1} \in U(X)$, 记

$$A(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_{k+1}) \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \dots & f_k(x_{k+1}) \end{vmatrix}; f_1, f_2, \dots, f_{k+1} \in U(X^*) \right\}$$

下面先引入本文所用的一些凸性的概念, 严格凸、局部一致凸和中点局部一致凸等常用凸性概念可见文[1].

(1) 若对任意 $\epsilon > 0$, $x \in S(X)$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, x)$, 使得 $x_1, \dots, x_{k+1} \in U(X)$, $\|x -$

$$\frac{x_1 + \dots + x_{k+1}}{k+1}\| \leq \delta \text{ 有}$$

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) < \epsilon$$

则 X 称为中点局部 K 一致凸.

(2) 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon)$, 使得 $x_1, \dots, x_{k+1} \in U(X)$, $\|x_1 + \dots + x_{k+1}\| > k+1 - \delta$ 有 $A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) < \epsilon$ 成立, 则 X 称为 K 一致凸^[3].

(3) 如果 $\epsilon > 0$, $x \in S(X)$, 且存在 $\delta = \delta(\epsilon, x)$, 使得当 $x_1, \dots, x_k \in U(X)$, $\|x + x_1 + \dots + x_k\| > k+1 - \delta$ 有 $A(x_1, x_2, \dots, x_k) < \epsilon$, 则 X 称为局部 K 一致凸^[5].

(4) 对任意 $x_1, \dots, x_{k+1} \in X$, 使得当 $\|\sum_{i=1}^{k+1} x_i\| = \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|$ 时, $x_1, \dots, x_{k+1}$ 是线性无关的, 则 X 称为 K 严格凸^[6].

* 收稿日期: 2004-12-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471155), 广东省自然科学基金资助项目(031608), 中山大学高等学术中心基金资助项目(04M10)

作者简介: 冼军(1976年生), 男, 博士; 通讯联系人, 黎永锦, Email: stslvj@mail.sysu.edu.cn

2 主要定理及其证明

明显地, Banach 空间的中点局部 K 一致凸是中点局部一致凸的推广。当 $K=1$ 时, 中点局部 K 一致凸等价于中点局部一致凸。

引理 1 若 X 为 Banach 空间, X 中点局部 K 一致凸当且仅当对任意的 $x \in S(X)$, $\{x_1^n, \dots, x_{K+1}^n\} \subset U(X)$ 当 $\|x - \frac{x_1^n + \dots + x_{K+1}^n}{K+1}\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 时, 有 $A(x_1^n, \dots, x_{K+1}^n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

定理 1 若 X 为中点局部 K 一致凸 Banach 空间, 则 X 为中点局部 $(K+1)$ 一致凸 Banach 空间。

证明 任取 $\{x_1^n, \dots, x_{K+2}^n\} \subset U(X)$ 使得 $\|x_1^n + \dots + x_{K+2}^n\| \rightarrow K+2$ ($n \rightarrow \infty$), 用三角不等式, 得 $\|x_1^n + \dots + x_{j-1}^n + x_{j+1}^n + \dots + x_{K+2}^n\| \rightarrow K+1$ ($n \rightarrow \infty$) 对任意 j 且满足 $1 \leq j \leq K+2$ 。由引理 1 及 X 的中点局部 K 一致凸条件, 有

$$A(x_1^n, \dots, x_{j-1}^n, x_{j+1}^n, \dots, x_{K+2}^n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1)$$

(1 $\leq j \leq K+2$)

且易得

$$A(x_1^n, \dots, x_{K+2}^n) \leq \sum_{j=1}^{K+2} A(x_1^n, \dots, x_{j-1}^n, x_{j+1}^n, \dots, x_{K+2}^n) \quad (2)$$

由(1), (2)式可得 $A(x_1^n, \dots, x_{K+2}^n) \rightarrow 0$, 由引理 1 可知 X 为中点局部 $(K+1)$ 一致凸。

例 1 设 $K \geq 2$ 为整数, 且 $i_1 < i_2 < \dots < i_K$ 。对任意 $x = (a_1, \dots, a_n, \dots) \in l_2$, 范数定义为 $\|x\|_{i_1, \dots, i_K}^2 = (\sum_{j=1}^K |a_{i_j}|)^2 + \sum_{i \neq i_1, \dots, i_K} a_i^2$ 。由文[7]的讨论可知 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1, \dots, i_K})$ 是 K 一致凸的, 由定理 1 可得 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1, \dots, i_K})$ 是中点局部 K 一致凸的。但 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1, \dots, i_K})$ 不是 $(K-1)$ 严格凸的。由定理 2 之(3)知它不是中点局部 $(K-1)$ 一致凸。

事实上取 $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots)$ ($j=1, 2, \dots, K$), 使得 $\|e_j\|_{i_1, i_2, \dots, i_K} = 1$ ($j=1, 2, \dots, K$) 且 $\{e_j\}_{j=1}^K$ 是线性无关的。同时由范数定义 $\|\sum_{j=1}^K e_j\|_{i_1, i_2, \dots, i_K} = \sum_{j=1}^K \|e_j\|_{i_1, i_2, \dots, i_K} = K$ 。由 $(K-1)$ 严格凸的定义, 可知 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1, \dots, i_K})$ 不是 $(K-1)$ 严格凸的。

由上面的讨论, 可知 Banach 空间是中点局部 K 一致凸性蕴涵中点局部 K 一致凸性, 但反过来一

般不成立。

引理 2 任意 $\epsilon > 0$, $x \in S(X)$, $f_1, \dots, f_K \in U(X^*)$, 有 $\delta = \delta(\epsilon, x, f_1, \dots, f_K)$, 当 $x_1, \dots, x_{K+1} \in U(X)$, $\|x - \frac{x_1 + \dots + x_{K+1}}{K+1}\| < \delta$ 下式成立,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_{K+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_K(x_1) & f_K(x_2) & \dots & f_K(x_{K+1}) \end{pmatrix} \leq \epsilon \quad (3)$$

则 X 为 K 严格凸的。

容易证明下面定理成立。

定理 2 (1) 若 X 为 K 一致凸, 则 X 局部 K 一致凸; (2) 若 X 局部 K 一致凸, 则 X 中点局部 K 一致凸; (3) 若 X 中点局部 K 一致凸, 则 X 为 K 严格凸。

使用文[3]中的方法, 不难证明下面结果。

定理 3 若 X, Y 为 Banach 空间, $\varphi \in \Psi$, 则 $X \oplus_{\varphi} Y$ 中点局部一致凸当且仅当 X, Y 均为中点局部一致凸且 φ 严格凸。

若 φ 是特殊函数, 用

$$\varphi(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + t^p)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{1-t, t\}, & p = \infty \end{cases}$$

代替定理 2 中的 $\varphi(t)$, 则可以得到下面结论, 这就是文[2]的主要结果。

推论 1^[2] 若 X, Y 为 Banach 空间, 则 $X \oplus_p Y$ 中点局部一致凸当且仅当 X, Y 均为中点局部一致凸。

下面的例子说明 K 凸要比 K 严格凸强, 但比 K 一致凸弱, 且对 $X \oplus_p Y$ 不具有遗传性, 也不满足对 $X \oplus_{\varphi} Y$ 的遗传性。

例 2 若 $X = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|\}$ 且 $Y = X$, 则 X, Y 为 2 一致凸的。由定理 2 知 X, Y 同时为中点局部 2 一致凸, 局部 2 一致凸, 2 严格凸, 但 $X \oplus_2 Y$ 不是 2 严格凸的。

事实上, 取 $X \oplus_2 Y$ 中 $z_1 = ((1, 0), (0, 1)), z_2 = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 0)), z_3 = ((0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ 。则 $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = \sqrt{2}$, 并且 $\|z_1 + z_2 + z_3\| = 3\sqrt{2}$, 由下面的讨论, 可知 z_1, z_2, z_3 线性无关。

假定 $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0$, 得到方程组

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

解得 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, 所以 z_1, z_2, z_3 线性无关。

由上面的讨论及 2 严格凸的定义, 可知 $X \oplus Y$ 不是 2 严格凸的。

下面将讨论 X, Y 与 $X \oplus_p Y$ 的中点局部K一致凸的关系。

引理 3^[8] 若 $x = (x_1, x_2) \in X_1 \oplus_p X_2, x_n = (x_1^n, x_2^n) \in X_1 \oplus_p X_2 (1 \leq p \leq \infty)$, 则在 $X_1 \oplus_p X_2$ 中 $x_n \rightarrow x$ 当且仅当下面条件成立:

(1) 在 $X_i (i=1, 2)$ 中 $x_i^n \rightarrow x_i$;

(2) $\|x^n\| \rightarrow \|x\|$, 也就是 $(\|x_1^n\|^p + \|x_2^n\|^p)^{1/p} \rightarrow (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{1/p}$ 。

定理 4 若 Banach 空间 X 为中点局部K一致凸, Y 中点局部L一致凸, 则 $X \oplus_p Y$ 为中点局部 $(K+L-1)$ 一致凸。

证明 假定

$$\|x - \frac{x^{(1,n)} + \dots + x^{(K+L,n)}}{K+L}\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

其中, $x^{(i,n)} = (x_1^{(i,n)}, x_2^{(i,n)}) \in U(X) (i=1, 2, \dots, K+L)$, 则有

$$\|x - \frac{x^{(1,n)} + \dots + x^{(K+L,n)}}{K+L}\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

以下分情况讨论。

情形(1) 若 $x - x^{(i,n)} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) (i=1, 2, \dots, K+L)$, 由引理 2 有 $x_1 - x_1^{(i,n)} \rightarrow 0, x_2 - x_2^{(i,n)} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) (i=1, 2, \dots, K+L)$ 。对任意的 $K+1$ 个元素 $\{i_1, i_2, \dots, i_{K+1}\} \subset \{1, 2, \dots, K+L\}$, 有

$$\|x_1 - \frac{x_1^{(i_1,n)} + \dots + x_1^{(i_{K+1},n)}}{K+1}\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

由此可得

$$\|x_1 - \frac{x_1^{(i_1,n)} + \dots + x_1^{(i_{K+1},n)}}{K+1}\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

类似地, 对任意 $L+1$ 个元素 $\{i_1, i_2, \dots, i_{L+1}\} \subset \{1, 2, \dots, K+L\}$, 可得

$$\|x_2 - \frac{x_2^{(i_1,n)} + \dots + x_2^{(i_{L+1},n)}}{L+1}\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

由 X 的中点局部K一致凸与 Y 的中点局部L一致凸, 可得

$$A(x_1^{(i_1,n)}, \dots, x_1^{(i_{K+1},n)}) \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$A(x_2^{(i_1,n)}, \dots, x_2^{(i_{L+1},n)}) \rightarrow 0 \quad (5)$$

又因 $(X \oplus_p Y)^* = X^* \oplus_q Y^*$, 其中 p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。因此

$$A(x^{(1,n)}, \dots, x^{(K+L,n)}) = \sup_{f_1, f_2, \dots, f_{K+L-1} \in U(X^* \oplus_q Y^*)} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \\ f_1(x^{(1,n)}) & \dots & f_1(x^{(K+1,n)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{K+L-1}(x^{(1,n)}) & \dots & f_{K+L-1}(x^{(K+L,n)}) \end{array} \right\}$$

展开上面的行列式为 2^{K+L+1} 个形如

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \\ f_{i_1}^1(x_1^{(1,n)}) & \dots & f_{i_{k+L}}^1(x_1^{(K+L,n)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{i_1}^{K+L-1}(x_1^{(1,n)}) & \dots & f_{i_{k+L}}^{K+L-1}(x_1^{(K+L,n)}) \end{array} \right|$$

的元素的和, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_{k+L} = 1$ 或 $2, f_i = (f_i^1, f_i^2) \in U(X^* \oplus_q Y^*) (i=1, 2, \dots, K+L-1)$ 。

将行列式分为 2 类, 一类至少有 $K+1$ 列形如 $(1, f_1^1(x_1^{(1,n)}), \dots, f_1^{K+L-1}(x_1^{(K+L,n)}))^T$ 列向量, 并称为 X 类; 另一类至少有 $L+1$ 列形如 $(1, f_2^1(x_2^{(1,n)}), \dots, f_2^{K+L-1}(x_2^{(K+L,n)}))^T$ 列向量, 并称为 Y 类。

由 Laplace 定理, 展开 X 类行列式, 可得 X 类行列式的行列式展开 $\sup$ 和小于

$$C_{K+L-1}^K A(x_1^{(i_1,n)}, \dots, x_1^{(i_{K+1},n)}) (L-1)! \leq (K+L-1)! A(x_1^{(i_1,n)}, \dots, x_1^{(i_{K+1},n)}) \quad (6)$$

类似地, Y 类的行列式展开 $\sup$ 和小于

$$C_{K+L-1}^L A(x_2^{(i_1,n)}, \dots, x_2^{(i_{L+1},n)}) (K-1)! \leq (K+L-1)! A(x_2^{(i_1,n)}, \dots, x_2^{(i_{L+1},n)}) \quad (7)$$

由上面的 (4), (5), (6) 及 (7) 式可导出

$$\begin{aligned} A(x^{(1,n)}, \dots, x^{(K+L,n)}) &\leq \sum_{X \text{ 类}} (K+L-1)! A(x_1^{(i_1,n)}, \dots, x_1^{(i_{K+1},n)}) + \\ &\quad \sum_{Y \text{ 类}} (K+L-1)! A(x_2^{(i_1,n)}, \dots, x_2^{(i_{L+1},n)}) \\ &\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

情形(2) 若 $\{x - x^{(i,n)}\}, \dots, \{x - x^{(K+L,n)}\}$ 至少有一个不收敛并且 $A(x^{(1,n)}, \dots, x^{(K+L,n)})$ 不收敛于 0 ($n \rightarrow \infty$), 则对给定 $\epsilon > 0$, 存在 $n_1 < n_2 < \dots$, 对任意 n_k 都有

$$A(x^{(1,n_k)}, \dots, x^{(K+L,n_k)}) \geq \epsilon \quad (8)$$

因为 $\{x - x^{(i,n)}\}$ 为有界集, 因此存在收敛子列 $\{x - x^{(i,n)}\}$, 为简便起见仍记为 $\{x - x^{(i,n)}\}$, 使得 $x - x^{(i,n)} \rightarrow a_i (n \rightarrow \infty) (i=1, 2, \dots, K+L)$ 。由引理 3, 得 $x_1 - x_1^{(i,n)} \rightarrow a_{i,1} (n \rightarrow \infty) (i=1, 2, \dots, K+L)$ 。由此得

$$\|y_1 - \frac{x_1^{(i,n)} + \dots + x_1^{(i_{K+1},n)}}{K+1}\|$$

$\rightarrow 0$ ($n \rightarrow 0$), 其中, $y_1 = x_1 - \frac{1}{K+1} \sum_{i=1}^{K+1} a_{i,1}$ 。由引

理 1 得 $A(x_1^{(i_1, n)}, \dots, x_1^{(i_{K+1}, n)}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

类似地可得到

$A(x_2^{(i_1, n)}, \dots, x_2^{(i_{L+1}, n)}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

类似第一种情况的证明, 可得

$$A(x^{(1, n)}, \dots, x^{(K+L, n)}) \leq$$

$$\sum_{X \text{ 类}} (K+L-1) A(x_1^{(i_1, n)}, \dots, x_1^{(i_{K+1}, n)}) +$$

$$\sum_{Y \text{ 类}} (K+L-1) A(x_2^{(i_1, n)}, \dots, x_2^{(i_{L+1}, n)}) \rightarrow 0$$

($n \rightarrow \infty$), 但这与 (8) 式矛盾, 证明完毕。

参考文献:

- [1] DAY M M. Normed linear spaces [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1973.
- [2] SMITH M A. Rotundity and extremity in $P(X_i)$ and $L^p(\mu, X)$ [J]. Contemp Math, 1986, 52: 143—162.
- [3] SAITO K S, KATO M. Uniform convexity of φ -direct sum of Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 2003, 227: 1—11.
- [4] TAKAHASHI Y, KATO M, SAITO K S. Strict convexity of

absolute norms on C^2 and direct sum of Banach spaces [J].

J Inequal Appl, 2002, 7: 179—186.

- [5] SULLIVAN F. A generalization of uniformly rotund Banach spaces [J]. Canad J Math, 1979, 31: 628—646.
- [6] SINGER I. On the set of best approximation of an element in a normed linear space [J]. Rev Roum Math Pure Appl, 1960, 5: 1629—1640.
- [7] LIN B L, YU X T. On the K -uniform rotund and fully convex Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 1985, 110: 407—410.
- [8] LEONARD I E. Banach sequences space [J]. J Math Anal Appl, 1976, 54: 245—265.
- [9] MOLTÓA, ORIHUELA J, TROYANSKI S, VALDIVAIA M. Midpoint locally uniform rotundity and a decomposition method of renorming [J]. Q J Math, 2001, 52: 181—193.
- [10] BEBEV V D. Direct products of symmetrically locally uniformly convex spaces (Russian) [J]. C R Acad Bulgare Sci, 1987, 40: 25—27.
- [11] XIAN J, LI Y J. Equivalence condition for some K convexities [J]. Acta Sci Natur Univ Sunyatseni, 2003, 42 (1): 12—15.

Midpoint Locally K uniform Convexity and φ Direct Sum

XIAN Jun, LI Yong jin, ZHAO Zhi hong

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Midpoint locally uniform convexity is generalized to the midpoint locally K uniform convexity, and the relation between the two cases is discussed. The following problem is discussed: suppose X, Y are either midpoint locally uniform convexity or midpoint locally K uniform convexity, respectively, whether $X \oplus_p Y$ ($1 < p < \infty$) or φ -direct sum $X \oplus_\varphi Y$ is still either midpoint locally K uniform convexity or midpoint locally uniform convexity.

Key words: midpoint locally K uniform convexity; locally K uniform convexity; K uniform convexity; K strictly convexity; φ direct sum