

抑制震荡的自适应小波阈值去噪方法^{*}

杨 坦, 周化雨, 关履泰

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘 要: 分析了小波阈值去噪方法在信号的间断附近产生震荡的原因, 根据产生机理的不同将它们分为属于伪 Gibbs 现象的震荡和由于小波阈值去噪在信号的间断部分因为去噪能力下降而属于噪声残留的震荡。为了消除这些震荡, 结合软、硬阈值方法的特点提出了一种新的阈值函数自适应地处理小波系数。试验表明, 该方法有效地抑制了信号间断点处的震荡, 获得了优于传统阈值方法的去噪效果。

关键词: 小波; 信号去噪; 震荡; 阈值函数

中图分类号: TN 911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 06-0015-05

由于在信号采集、传输及处理过程中不可避免地受到噪声的影响, 从带噪数据中恢复信号在理论分析和实际应用中都具有十分重要的意义。近些年来, 基于小波的去噪方法越来越流行^[1,2]。经典的小波阈值去噪方法分为软阈值方法和硬阈值方法^[3,4]。

采用软阈值方法得到的估计信号在间断处会显得比较模糊, 由于对小波系数采取收缩处理, 整体误差一般会比硬阈值方法大。硬阈值方法的信噪比通常会比软阈值方法高, 但是在信号的间断点附近会产生震荡。对图像而言, 在边缘处的震荡会严重地降低图像的视觉质量。

近期有许多工作致力于消除小波阈值去噪产生的震荡。Sylvain 等^[5]通过构造一个带约束的全变差极小问题来消除伪 Gibbs 现象。Zhu 等^[6]提出了一种基于二进小波并在小波阈值去噪前先对小波系数进行去噪的算法, 在提高信噪比的同时有效抑制了伪 Gibbs 现象。Gun 等^[7]在对小波系数做阈值处理的同时对尺度系数进行局部加权的 Wiener 滤波, 震荡得到了抑制。

以上方法在对小波系数进行阈值处理的基础上都引入了其它去噪手段。实际上, 软、硬阈值方法在去噪和保护间断方面处于两个极端, 若采取适当方式将这两种方法折衷, 避其所短, 扬其所长, 就能够取得更好的去噪效果。为了在抑制震荡的同时尽可能地保护间断, 综合软、硬阈值方法的优点, 本文提出了一种自适应的方法灵活地处理小波系数。

1 小波阈值去噪及相关分析

1.1 小波阈值去噪

设有观测信号

$$f(k) = x(k) + n(k) \quad (1)$$

其中, $x(k)$ 为原始信号, $n(k)$ 是均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯白噪声。由小波变换的线性性有:

$$\omega_{j,k} = W_{j,k}(f) = W_{j,k}(x) + W_{j,k}(n) \quad (2)$$

其中, $W_{j,k}(x)$ 和 $W_{j,k}(n)$ 分别是未受噪声污染的信号和噪声的小波变换。小波阈值去噪方法将绝对值小于阈值的小波系数置为 0, 对其余的小波系数进行保留或收缩。依据阈值函数的不同, 分为硬阈值方法和软阈值方法:

$$\hat{\omega}_{j,k}(\omega_{j,k}) = x I_{[\omega_{j,k} \triangleright \lambda]} \quad (3)$$

为硬阈值函数, $I_{[a,b]}$ 是区间 $[a, b]$ 上的特征函数。

软阈值函数定义为:

$$\hat{\omega}_{j,k}(\omega_{j,k}) = \text{sgn}(\omega_{j,k})(|\omega_{j,k}| - \lambda)_+ \quad (4)$$

通常软阈值去噪得到的信号整体误差较大, 信号的间断处比较光滑(图 5c)。硬阈值方法得到的信号信噪比较高, 间断得到了较好的保护, 但是间断处存在伪 Gibbs 现象(图 5b)。

1.2 产生震荡的原因分析

小波阈值去噪得到的信号常在间断点附近出现原始信号所没有的震荡, 按照产生的原因可分为 2 类。第一类是在变换域处理信号时很常见的振铃现象(ringing artifacts)。在变换域中通常会将较小的值

* 收稿日期: 2004-12-02

基金项目: 广东省自然科学基金重点资助项目(036608); 香港中山大学高等学术研究中心基金会资助项目(05M7)

作者简介: 杨坦(1977年生), 男, 博士, E-mail: fliangtang@21cn.com

置为 0，这样的处理在空间域中会产生围绕在间断点附近的人为震荡，这就是熟知的 Gibbs 现象，在付立叶域、DCT 域中都存在。在小波域中，用具有一定连续性的小波基来逼近一个锐利的间断需要许多精确组织在一起的非零小波系数。对小波系数取阈值会从小波基的组合中去掉那些系数的幅值小于阈值的小波基，当这些小波基的支集包含间断点时，去噪结果就会在间断附近产生震荡。在小波域中，由于小波的时频局部化特性，震荡的位置局限在间断点附近，这种现象被称为伪-Gibbs 现象。伪-Gibbs 现象表现为当小波分解的层数大于这些小波系数所在的层数时才出现震荡，如图 1 所示，注意到间断处的震荡在小波分解层数大于等于 3 时才发生。小波阈值去噪中，小波基函数的支集越

大，越容易出现伪 Gibbs 现象。

另一类震荡有如下的解释。通过比较小波系数的幅值与阈值的大小可以极高的概率将由噪声引起的小波系数识别出来。在信号的平滑部分，低尺度的小波系数大多小于去噪阈值，对应于低频信息的大尺度的小波系数和尺度系数无论进行保留还是收缩都不会太大地改变去噪信号的光滑性。大幅值的小波系数集中在奇异点的影响锥中，大于阈值的小波系数并不是“干净”的小波系数，而是原始信号的小波系数与噪声的小波系数之和。对这部分系数的处理方式决定了去噪信号在奇异点附近的表现。无论用硬阈值处理还是软阈值处理都无法有效地去除噪声成份，所以信号的间断处出现的震荡实质上是未完全去除的噪声，如图 2 所示。

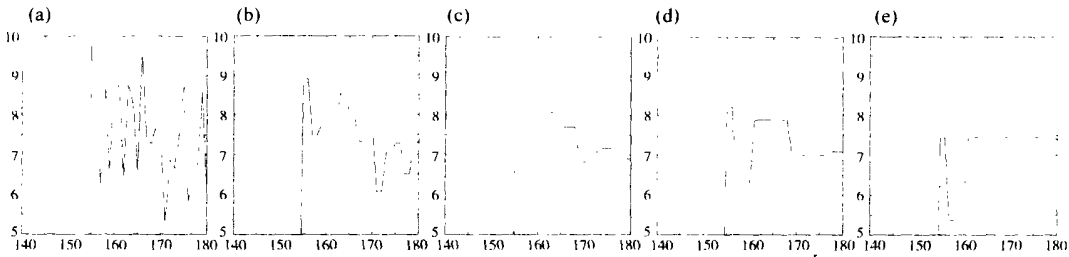


图 1 图 5 中的 $t=155$ 处的局部邻域放大，这个震荡属于伪-Gibbs 现象。从 (a) 到 (e) 分别是带噪声信号及其分解到 1 至 4 层的小波硬阈值去噪结果

Fig 1 Ringing artifacts classified to PseudoGibbs in Fig 4 at $t=155$. From (a) to (e) are the noised sign and the wavelet denoised results corresponding to hard threshold in decompose level 1 to 4

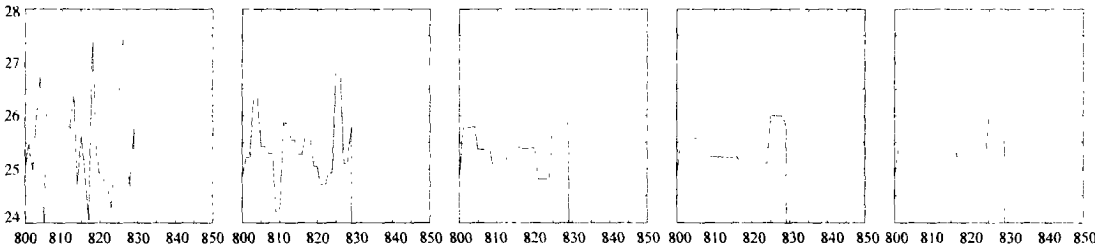


图 2 处于图 4 中 $t=829$ 处间断邻域的震荡。从 (a) 到 (e) 分别是带噪声信号及其分解到 1 至 4 层的小波硬阈值去噪结果

Fig 2 Ringing artifacts classified to remnant noise in Fig 4 at $t=829$. From (a) to (e) are the noised sign and the wavelet denoised results corresponding to hard threshold in decompose level 1 to 4

2 自适应的小波阈值去噪方法

基于以上分析，本文提出了一种自适应小波系数处理方法来抑制以上 2 类震荡，在包含信号间断的区间和其外的区间采取不同的阈值函数处理小波系数，抑制间断附近的震荡，又保持原始阈值方法的简便性。基本的思想是先找出间断的位置，保留与间断的重建有关的小波系数，对这些系数用本文提出的阈值函数处理，而对另外的小波系数采用传

统的硬阈值方法处理。

2.1 间断的定位

确定间断发生的位置有 2 个目的：第一通过保留幅值小于阈值且重建间断所需的所有小波系数来抑制伪-Gibbs 现象；第二通过判断信号的间断与非间断部分而使用不同的小波系数处理方法以实现保护边缘、抑制震荡。

用阶跃函数模型来表征信号的间断结构。根据阶跃处产生较大幅值的小波系数来实现对间断的定

位, 用 Haar 小波对信号进行一次分解, 将小波系数与去噪阈值比较, 系数大于阈值的小波函数对应的间断位置即为估计的间断位置。由于小波变换缺乏平移不变性, 小波系数的幅值与间断的位置相关, 在从带噪数据分解的小波系数中求得估计的间断位置后, 还需要对原始数据进行一个单位的平移, 再进行间断位置的估计。将两次的结果合并在一起, 便求得完整的估计。

图 3 以 Haar 小波为例解释了如何判断间断位置并保留相关的小波系数。图 3a 表示了 Haar 小波的 3 层正交离散变换得到的小波系数间的空间关系。最上一层的点表示尺度函数的系数, 其下是由高到低各尺度上的小波系数, 最下面的点表示原始数据。每个点引出的折线在数据点中的位置表示与该系数对应的 Haar 小波基的间断所处的位置。在 Haar 小波的正交离散变换中同一尺度上不同的小波基的支集是不相交的, 以最高尺度的小波系数为根结点, 将与其有共同支集的各尺度上的小波系数构成一棵二叉树 (图 3b)。经过对图 3a 的简单分析, 图 3b 中显示了间断的位置与表达该间断的各层小波系数的关系: 与间断的重构有关的小波系数是间断位置节点及其所有父节点的集合。

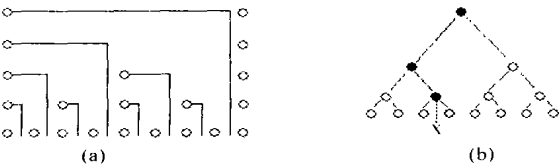


图 3 空间相关的不同尺度的 Haar 小波函数对应的间断的位置与 Haar 小波分解的二叉树结构及与间断相关的小波系数的组织图

Fig. 3 Discontinuous positions corresponding to Haar functions in different scales and binary tree structure produced by Haar wavelets decomposing and the relation of wavelet coefficients and discontinuous positions

2.2 新的阈值函数

对由于小波阈值法在间断附近信噪分离能力下降而产生的震荡, 收缩小波系数幅值的软阈值方法是一种简单有效的处理方法, 能够抑制震荡的产生, 副作用是间断变得模糊且信噪比低、误差大。

由于高斯白噪声的小波变换系数的平均功率与小波变换尺度的倒数成正比^[8]:

$$E\left[|Wn(s, x)|^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(n(u)n(v)) \cdot \psi(x-u) \psi(x-v) du dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-v) \cdot$$

$$\psi_s(x-u) \psi_s(x-v) du dv = \frac{\|\psi\|^2}{S} \quad (5)$$

而正则信号的小波变换系数随尺度增加而增加, 故噪声对低尺度小波系数的影响要大于对高尺度小波系数的影响。软阈值函数对低尺度小波系数能起到较光滑的去噪效果, 对高尺度小波系数会造成信噪比下降。为了抑制间断附近的震荡, 需要对低尺度小波系数进行收缩, 同时保护大尺度的小波系数。

基于以上分析, 本文提出一种新的阈值函数来处理与间断有关的各尺度上的小波系数。从分解的最低层到最高层阈值函数从软阈值函数过渡到硬阈值函数。对于第 i 尺度的小波系数, 新的阈值函数定义为:

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{j,k}) (|\omega_{j,k}| - a_j \lambda), & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0 & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (6)$$

式中, $a_j (0 \leq a_j \leq 1)$ 随尺度 j 的不同取不同的值。当 $a_j = 0$ 时(6)式就是硬阈值方法, 若 $a_j = 1$ 则(6)式就是软阈值方法。考虑到文[7]中的结论, 本文取:

$$a_j = 2^{1-j} \quad (7)$$

实际计算时对 $j = 1, 2, 3$ 做如上的处理就已取得显著的效果, 为了方便处理, 可在 $j > 3$ 时令 $a_j = 0$ 。

图 4 对一个带噪的阶跃信号分别应用本文提出的自适应方法和软、硬阈值方法进行去噪处理。从图中可以看到新的阈值函数在保护间断和抑制震荡方面表现得最好。

2.3 去噪算法的实现

为保护间断同时抑制震荡, 本文在信号的间断部分采用新的阈值函数处理, 在其余部分应用通常的硬阈值方法, 算法如下:

- (1) 选取小波函数和分解层数, 对带噪信号进行离散正交小波分解;

(2) 用 Haar 小波求得估计的间断位置;

(3) 标记出与重构间断有关的所有小波系数, 用本文提出的阈值函数进行处理, 小于阈值的系数予以保留, 对其余的小波系数用硬阈值函数处理;

(4) 对处理后的数据进行小波逆变换, 得到去噪信号。

3 仿真实验

对带噪的 Block 信号 (SNR=17.3) 应用本文提出的方法进行去噪, 作为对比也用传统的软、硬阈值方进行处理。采用 Haar 小波, 分解层数为 5, 阈值按照文[3]中的方法取, 结果显示在图 5 中。

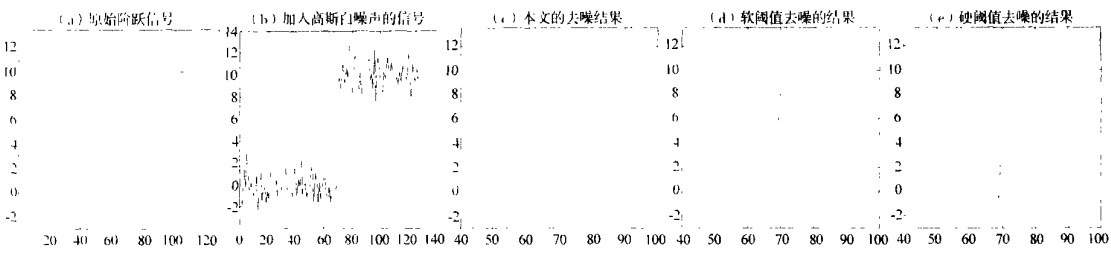


图 4 用不同方法对带噪阶跃信号进行去噪的结果比较

Fig. 4 Denoised results with different denoising methods to noised step-sig

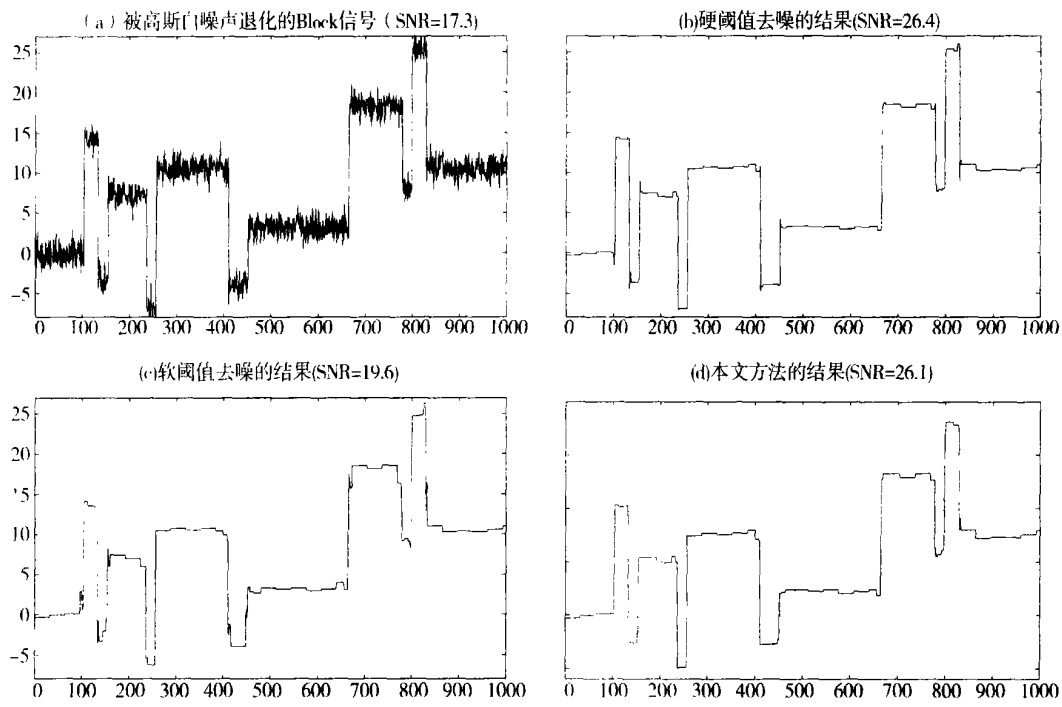


图 5 用不同方法对带噪 Block 阶跃信号进行去噪的结果比较

Fi 5 Denoised results with different denoising methods to the noised Block-sig

由于保留了间断点重建所需的所有小波系数，极大程度地消除了伪-Gibbs 现象。本文提出的方法在信号的平滑部分与传统的硬阈值方法相同，因而在大部分区域中具有良好的逼近能力，信噪比较高，接近于硬阈值方法。软阈值方法去噪在部分间断处显得比较光滑，在一部分间断附近出现严重的伪-Gibbs 现象，软阈值方法去噪后的信号与原信号整体偏差较大，所以信噪比最低。本文方法抑制了硬阈值法在信号奇异点处的震荡幅度，而且信噪比要高于软阈值方法。

基于小波的信号去噪、压缩中常常在信号的间断处出现震荡，这是许多研究者试图消除或避免的。本文以一维信号为对象，结合软、硬阈值方法的特点提出了一个新阈值函数，与其他研究工作相比，采用尽可能简单的阈值处理方法并结合了自适应思想。试验表明本文方法能有效抑制信号奇异点处产生的震荡。至于如何将本文提出的算法推至二

维的情况，则有待进一步的研究。

参考文献:

[1] CHING P.C, SO H.C, WU S.Q. On wavelet denoising and its applications to time delay estimation[J] . IEEE Trans Signal Processing, 1999, 47(10): 2879— 2882.

[2] SHARK L.K, YU C. Denoising by optimal fuzzy thresholding in wavelet domain[J] . Electronics Letters, 2000, 36(6): 581— 582.

[3] DONOHO D.L, JOHNSTONE I.M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J] . Biometrika, 1994, 81: 425— 455.

[4] DONOHO D.L, JOHNSTONE I.M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J] . ASA, 1995, 90(432): 1200— 1224.

[5] SYLVAIN D, FROMENT J. Artifact free signal denoising with wavelets[J] . IEEE ICASSP 2001, 2001, 6: 7— 11.

[6] ZHU H.L, KWOK J.T, QU L.S. Improving denoising by coefficient denoising and dyadic wavelet transform[C]. //

Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR' 02), Quebec City, Canada, August 2002; 272—276.

[7] GUN S S, KANG M G. Ringing artifact reduction in the wavelet-based denoising [C] // IEEE ICASSP2004, May 2004, Montreal, Quebec.

[8] GROSSMANN A , HOLSCHNEIDER M , KRONLAND - MARTINET R, et al. Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms[J] . Advances in Electronic and Electron Physics Supplement: Inverse Problems, 1987, S19; 289—306.

Ringing Artifacts Reduction in Adaptive Wavelet Threshold Denoising

YANG Tan, ZHOU Hua yu, GUAN Lü tai

(Department of Scientific Computation and Computer Applications, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The reason of ringing artifacts appearing near the discontinue points in denoised signal is analyzed by traditional wavelet shrinkage methods. Based on the different origins, the ringing artifacts are devided into two classes. One class is Pseudo Gibbs phenomena and the other class is the remnant noise. To reduce these artifacts, a new threshold function and a new adaptive algorithm are obtained which could handle wavelet coefficients flexibly. Numerical experiments show that presented method can significantly depress ringing artifacts.

Key words: wavelet; signal denoise; ringing artifacts; threshold function

(上接第 14 页)

Construction of Orthogonal Multiresolution Analysis Using Quadratic Fractal Interpolation Functions

DENG Xiao yan, LONG Guang qing

(Department of Scientific Computing and Computer Application, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A method for constructing a continuous, supported and orthogonal scale functions using quadratic fractal interpolation functions is given, differing from orthogonal wavelets constructed by AFI's, scale functions have differentiability and can be used to set up numerical scheme for differential equation.

Key words: multiwavelet; fractal interpolation function; orthogonal multiresolution analysis