

具有势函数的高阶非线性 Schrödinger 方程的解*

郭翠花, 崔尚斌

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究了一个带有与时间 t 有关的势函数的高阶 Schrödinger 方程初值问题的解的存在性, 唯一性与正则性, 给出了能使方程有古典解的势函数的充分条件。在第一种假设下用压缩不动点原理给出了解的局部存在性, 再利用能量守恒律得到解的整体存在性。在第二种假设下用磨光函数得到解的存在性。

关键词: Schrödinger 方程; 初值问题; 势函数

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 05-0010-04

1 假设及主要结果

本文考虑下述非线性 Schrödinger 方程:

$$\begin{cases} i u_t = P(D)u + V(t, x)u, x \in \mathbf{R}^n, t \in I, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $D = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, P 是一个 m 阶的实的齐次椭圆多项式 ($m \geq 4$, m 是偶数), $V(t, x)$ 是一个与 t 有关的势函数, $I = (-T, T)$ 。当函数 $V(t, x) \equiv 0$ 时, 已有不少学者讨论, 见文[1-5]。当 $m = 2$ 时, 文[6]已经讨论了方程(1)的解的存在性与解的正则性。当 $m \geq 4$ 时, 文[7]给出了当 $V(t, x)$ 只与 x 有关时的 L^p 估计, 但并未给出解的表达式。在实际应用中经常会碰到势函数 $V(t, x)$ 与 t 有关的情形^[8-9], 因此有必要讨论一下这种情况。以下是2种假设:

假设 1: 对某些 $p \geq 1, \alpha \geq 1, \beta > 1$, 当 $0 \leq \frac{1}{\alpha} < 1 - \frac{n}{2p}$ 时, 有: $V(t, x) \in L^\alpha(I, L^p(\mathbf{R}^n)) + L^\beta(I, L^\infty(\mathbf{R}^n))$,

假设 2: $V(t, x) \in C(I, L^{\tilde{p}}(\mathbf{R}^n)) + C(I, L^\infty(\mathbf{R}^n))$, 且 $\frac{\partial V}{\partial t} \in L^{\alpha_1}(I, L^{p_1}(\mathbf{R}^n)) + L^\beta(I, L^\infty(\mathbf{R}^n))$ 。其中, $\tilde{p} = \max(p, 2)$; $\alpha_1 > \frac{4p}{4p-n}$, p_1 满足下述条件:

$$p_1 \begin{cases} = \frac{2np}{n+4p}, n \geq 5 \\ > \frac{2p}{p+1}, n = 4 \\ = \frac{2p}{p+1}, n \leq 3 \end{cases}$$

称 (r, q) 为允许对是指: $\frac{2}{r} = \frac{n}{m}(1 - \frac{2}{q}), 0 \leq \frac{n}{m}(1 - \frac{2}{q}) < 1$ 。本文的主要结果为以下2个定理。

定理 1 若假设 1 成立, 且 $q = \frac{2p}{p-1}$, 则对

任意 $u_0(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, 方程(1)有解 $u(x, t)$ 满足:

$$u(x, t) \in C(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^n)) \cap L^r(\mathbf{R}; L^q(\mathbf{R}^n))$$

定理 2 若假设 2 成立, 对任意 $u_0(x) \in H^2(\mathbf{R}^n)$, 有定理 1 仍然成立, 且有:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C(I, L^2(\mathbf{R}^n)) \cap L^r(I, L^q(\mathbf{R}^n)),$$

$$u(x, t) \in C^1(I, L^2(\mathbf{R}^n))$$

首先介绍一些符号。

$L^q(\mathbf{R}^n)$ 代表在 $\mathbf{R}^n$ 上 q 次可积函数, 其范数定

义为 $\|u\|_q = (\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$, $L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n)) =$

$\{u: (\int_I (\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^q dx)^{\frac{r}{q}} dt)^{\frac{1}{r}} = \|u\|_{L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n))}$

$< \infty\}$ 。如果 X 为一 Banach 空间, 则 $C^k(I; X)$ 代表函数定义域为 I , 取值在 X 中的所有 k 阶连续可微函数的全体。 $C(I; X) = C^0(I; X)$ 。

2 引理

首先定义2个在后面要用到的积分算子 Q 和 S :

$$(Qu)(t) = \int_0^t U(t-\tau) V(\tau) u(\tau) d\tau,$$

$$(Su)(t) = \int_0^t U(t-\tau) u(\tau) d\tau,$$

$$U(t) = \exp(-iP(D)t)$$

显然 $(Qu)(t) = (SVu)(t)$ 。为研究上述2个算子

* 收稿日期: 2004-09-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471157)

作者简介: 郭翠花 (1972年生), 女, 讲师, 博士生; E-mail: gchzjq@yahoo.com.cn

的性质, 引进 4 个在 $I \times \mathbf{R}^n$ 上的 Banach 空间:

$$\begin{aligned} X(T, q) &= C(I; L^2(\mathbf{R}^n)) \cap L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n)), \\ X^*(T, q) &= L^1(I; L^2(\mathbf{R}^n)) + L^{r'}(I; L^{q'}(\mathbf{R}^n)), \\ Y(T, q) &= \{u: u \in C(I; H^2(\mathbf{R}^n)), \\ &\quad \dot{u} \in X(T, q)\}, \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \\ Y^*(T, q) &= \{u: u \in C(I; L^2(\mathbf{R}^n)), \\ &\quad \dot{u} \in X^*(T, q)\} \end{aligned}$$

并定义上述空间的范数:

$$\begin{aligned} \|u\|_{X(T, q)} &= \|u\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u\|_{L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n))}, \\ \|u\|_{X^*(T, q)} &= \inf\{\|u_1\|_{L^1(I; L^2(\mathbf{R}^n))} + \\ &\quad \|u_2\|_{L^{r'}(I; L^{q'}(\mathbf{R}^n))}, u = u_1 + u_2\}, \\ \|u\|_{Y(T, q)} &= \|u\|_{L^\infty(I; H^2(\mathbf{R}^n))} + \|\dot{u}\|_{X(T, q)}, \\ \|u\|_{Y^*(T, q)} &= \|u\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|\dot{u}\|_{X^*(T, q)} \end{aligned}$$

引理 1 假定 (r, q) 为允许对, 则有:

$$\|U(t)f\|_{X(T, q)} \leq c\|f\|_2 \quad (2)$$

证明 根据 $X(T, q)$ 的定义需分 2 步来证明。

(1) 先考虑 $\|U(t)f\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))}$

利用文[7]中推论 2.6, 取 $q = 2$, 有 $\|U(t)f\|_2 \leq c\|f\|_2$, 于是得到

$$\|U(t)f\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq c\|f\|_2 \quad (3)$$

(2) 其次考虑 $\|U(t)f\|_{L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n))}$

$$\langle U(t)f, \psi \rangle \leq \left\| \int_I U(t)\bar{\psi} dt \right\|_2 \|f\|_2,$$

$$\left\| \int_I U(t)\bar{\psi} dt \right\|_2^2 \leq \left\| \int_I U(t-\tau)\phi(\tau) d\tau \right\|_{L^1(I; L^q(\mathbf{R}^n))} \cdot \|\phi\|_{L^{q'}(I; L^{q'}(\mathbf{R}^n))},$$

$$\left\| \int_I U(t-\tau)\phi(\tau) d\tau \right\|_{L^1(I; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq$$

$$\left(c \int_I \left(\left\| \int_I |t-\tau|^{-\frac{n}{m}(1-\frac{2}{q})} \|\phi(\cdot, \tau)\|_q d\tau \right\|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \leq c\|\phi\|_{L^{q'}(I; L^{q'}(\mathbf{R}^n))}$$

(最后一个不等式中用到了 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式) 利用上述 3 个不等式以及对偶法便可得到估计式:

$$\|U(t)f\|_{L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq c\|f\|_2 \quad (4)$$

引理 2 假定 (r, q) 为允许对, 则有:

$$\|Su\|_{X(T, q)} \leq c\|u\|_{X^*(T, q)}, u \in X^*(T, q) \quad (5)$$

证明 根据 $\|\cdot\|_{X(T, q)}$ 的定义, 分 2 步来证明。

(1) 先估计 $\|Su\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))}$

$$\|Su\|_2^2 = \int_0^t (u(\cdot, \sigma), \int_0^t U(\sigma-\tau)u(\cdot, \tau) d\tau) d\sigma$$

$$\leq \int_0^t \|u(\cdot, \sigma)\|_{q'} \left\| \int_0^t U(\sigma-\tau)u(\cdot, \tau) d\tau \right\|_q d\sigma$$

$$\begin{aligned} &\leq c\|u\|_{L^{q'}(I; L^{q'}(\mathbf{R}^n))} \left\| \int_0^t U(\sigma-\tau)u(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{L^1(I; L^2(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq c\|u\|_{L^{q'}(I; L^{q'}(\mathbf{R}^n))}^2 \end{aligned}$$

从而有

$$\|Su\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} \leq c\|u\|_{L^{q'}(I; L^{q'}(\mathbf{R}^n))} \quad (6)$$

(2) 再估计 $\|Su\|_{L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n))}$

$$\langle Su, \psi \rangle = \int_I (u(\cdot, \tau), \int_\tau^t U(\tau-t)\phi(\cdot, \tau) dt) d\tau$$

$$\begin{aligned} &\leq c\|u\|_{L^1(I; L^2(\mathbf{R}^n))} \left\| \int_0^t U(t-\tau)\phi(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} \\ &\leq c\|u\|_{L^1(I; L^2(\mathbf{R}^n))} \|\phi\|_{L^{q'}(I; L^{q'}(\mathbf{R}^n))} \end{aligned}$$

再利用对偶法便可得到

$$\|Su\|_{L^r(I; L^q(\mathbf{R}^n))} \leq c\|u\|_{L^1(I; L^2(\mathbf{R}^n))} \quad (7)$$

引理 3 以下不等式成立

$$\|Su\|_{Y(T, q)} \leq c(1+T)\|u\|_{Y^*(T, q)} \quad (8)$$

证明 根据 $\|\cdot\|_{Y(T, q)}$ 的定义, 分别需要考

虑 $\|Su\|_{L^\infty(I; H^2(\mathbf{R}^n))}$ 和 $\left\| \frac{d}{dt}(Su)(t) \right\|_{X(T, q)}$

由 Su 的定义和方程(1)可知:

$$\frac{d}{dt}(Su)(t) = S\dot{u}(t) + U(t)u_0,$$

$$(-i\frac{d}{dt} + P(D))(Su)(t) = -iu(t)$$

再把引理 1 和引理 2 用到上述 2 个不等式上, 有

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{d}{dt} \right) Su(t) \right\|_{X(T, q)} &= \|S\dot{u}(t) + U(t)u_0\|_{X(T, q)} \leq \\ &\|S\dot{u}(t)\|_{X(T, q)} + \|U(t)u_0\|_{X(T, q)} \leq \\ &c(\|\dot{u}\|_{X^*(T, q)} + \|u_0\|_2) \leq \\ &c\|u\|_{Y^*(T, q)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \|Su\|_{L^\infty(I; H^2(\mathbf{R}^n))} &\leq 2(\|Su\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} + \\ &\|P(D)Su\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))}) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2(\|u\|_{L^1(I; L^2(\mathbf{R}^n))} + \|u\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} + \left\| \frac{d}{dt} Su \right\|_{X(T, q)}) \leq \\ &4(1+T)\|u\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} + c\|u\|_{Y^*(T, q)} \leq \\ &c(1+T)\|u\|_{Y^*(T, q)} \end{aligned} \quad (10)$$

为考虑势函数, 引进下述记号:

$$\begin{aligned} \|V\|_M &= \inf\{\|V_1\|_{L^p(I; L^p(\mathbf{R}^n))} + \\ &\|V_2\|_{L^p(I; L^\infty(\mathbf{R}^n))}, V = V_1 + V_2\}, \\ \|V\|_{\bar{M}} &= \inf\{\|V_1\|_{L^\infty(I; L^p(\mathbf{R}^n))} + \\ &\|V_2\|_{L^\infty(I; L^\infty(\mathbf{R}^n))}, V = V_1 + V_2\}, \\ \|\dot{V}\|_N &= \inf\{\|W_1\|_{L^1(I; L^1(\mathbf{R}^n))} + \\ &\|W_2\|_{L^1(I; L^\infty(\mathbf{R}^n))}, \frac{\partial V}{\partial t} = W_1 + W_2\} \end{aligned}$$

下述 2 个引理见文[6]中引理 2.3 和引理 2.4。

引理 4 若假设 1 成立, 则有

$$\|Vu\|_{X^*(T, q)} \leq (2T)^\gamma \|V\|_M \|u\|_{X(T, q)} \quad (11)$$

其中, $2T < 1$, $\gamma = \min(1 - \frac{1}{\beta}, 1 - \frac{n}{2p} - \frac{1}{\alpha})$ 。

引理5 若假设2成立, 则对任意 ε , 存在 C_ε , 使得当 $|2T| < 1$ 时有:

$$\begin{aligned} \|Vu\|_{Y^*(T,q)} &\leq (\varepsilon \|V\|_{\tilde{M}} + (2T)^k \|\dot{V}\|_N) \cdot \\ \|u\|_{Y(T,q)} + C_\varepsilon \|V\|_{\tilde{M}} \|u\|_{L^2(I;L^\infty(\mathbf{R}^n))} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $k = \min(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha_1}, \gamma)$.

引理6 假定 $u \in X(T, q)$ 且满足: $u(t) = U(t)u_0 + SVu(t)$, $u_0 \in H^2(\mathbf{R}^n)$, $Vu \in Y^*(T, q)$, 则有: $u \in Y(T, q)$.

证明 因为 $u_0 \in H \in H^2(\mathbf{R}^n)$, 所以 $U(t)u_0 \in Y(T, q)$. 再根据引理3, 可以得到 $SVu(t) \in Y(T, q)$, 利用已知条件便可得到 $u(t) \in Y(T, q)$.

引理7 设 $V \in C^1(I; L^\infty(\mathbf{R}^n))$, $u_0 \in H^2(\mathbf{R}^n)$, 如果有 $u \in X(T, q)$ 满足引理6的条件, 那么 $u \in Y(T, q)$.

证明 用导数定义求得 $iu(t) = U(t)V(0)u_0 + S\dot{V}u + SV\dot{u}$, 由此推得 $Vu \in Y^*(T, q)$, 再利用引理6便可得到 $u \in Y(T, q)$.

3 定理的证明

定理1的证明 令 $q = \frac{2p}{p-1}$. 下面考虑积分方程

$$u(x, t) = U(t)u_0(x) + (Qu)(t) \quad (13)$$

取 $F: u(x, t) \rightarrow U(t)u_0(x) + (Qu)(t)$, 在 $X(T, q)$ 的闭子空间 $X = \{u \in X(T, q) \mid \|u\|_{X(T, q)} < a\}$ 上考虑映射 F , 对任意 $u_0(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, 利用引理1-引理4, 有:

$$\begin{aligned} \|Fu\|_{X(T, q)} &\leq \|U(t)u_0(x)\|_{X(T, q)} + \\ \|(Qu)(t)\|_{X(T, q)} &\leq c\|u_0\|_2 + c\|Vu\|_{X^*(T, q)} \\ &\leq c\|u_0\|_2 + c(2T)^\gamma \|V\|_M \|u\|_{X(T, q)} \\ \|Fu_1 - Fu_2\|_{X(T, q)} &\leq c\|V(u_1 - u_2)\|_{X^*(T, q)} \\ &\leq c(2T)^\gamma \|V\|_M \|u_1 - u_2\|_{X(T, q)} \end{aligned}$$

取 $c(2T)^\gamma \|V\|_M \leq \frac{1}{2}$, 则 F 为 X 上压缩映射.

取 $a = \max(2c\|u_0\|_2, c(2T)^{-\gamma}\|V\|_M^{-1}\|u_0\|_2)$, 则 F 为 X 到 X 的映射. 利用不动点原理得积分方程(13)有唯一解 $u(x, t) = (I + iQ)^{-1}u_0 \in X(T, q)$. 利用 $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$ 和解的延拓定理便可得到定理1的结论.

定理2的证明 显然假设2包含假设1, 因此定理1成立. 即有 $u(x, t) \in X(T, q)$.

下证 $u(x, t) \in Y(T, q)$. 根据假设2, $V = V_1 + V_2$, 其中 $V_1 \in C(I; L^p(\mathbf{R}^n))$, $V_2 \in C(I;$

$L^\infty(\mathbf{R}^n))$. 取2个磨光函数 $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 令 $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ 充分小,

$$V_{1\varepsilon}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^n} V_1(x + \sigma y, t + \varepsilon s) dy ds,$$

$$V_{2\varepsilon}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_2(x, t + \varepsilon s) ds$$

令 $V_\varepsilon = V_{1\varepsilon} + V_{2\varepsilon}$, 很显然有 $V_\varepsilon \in C^1(I; L^\infty(\mathbf{R}^n))$, 而且由假设2有:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|V_\varepsilon - V\|_{\tilde{M}} + \|\dot{V}_\varepsilon - \dot{V}\|_N) = 0 \quad (14)$$

根据引理7, 积分方程

$$u_\varepsilon(t) = U(t)u_0 + SV_\varepsilon u_\varepsilon(t), u_0 \in H^2(\mathbf{R}^n) \quad (15)$$

有解 $u_\varepsilon \in Y(T, q)$, 而且满足

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{X(T, q)} = 0 \quad (16)$$

又因为对任意的 $\delta > 0$, 根据引理3和引理5有:

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{Y(T, q)} &\leq c(\|u_0\|_{H^2(\mathbf{R}^n)} + (1+T)\|V_\varepsilon u_\varepsilon\|_{Y^*(T, q)}) \leq \\ &c(1+T)(\delta\|V_\varepsilon\|_M + T^k\|\dot{V}_\varepsilon\|_N)\|u_\varepsilon\|_{Y(T, q)} + \\ &c(\|u_0\|_{H^2(\mathbf{R}^n)} + c_\delta\|V_\varepsilon\|_M\|u_0\|_2) \end{aligned}$$

因为 c 和 c_δ 与 T 无关, 现选取 δ 和 T 使得 $c(1+T)(\delta\|V_\varepsilon\|_M + T^k\|\dot{V}_\varepsilon\|_N) < \frac{1}{2}$, 从而可以得到

$$\|u_\varepsilon\|_{Y(T, q)} \leq c(\|u_0\|_{H^2(\mathbf{R}^n)} + c_\delta\|V_\varepsilon\|_M\|u_0\|_2) \quad (17)$$

同理可以得到

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{Y(T, q)} &\leq c(1+T)(\delta\|V_\varepsilon - V\|_M + \\ &T^k\|\dot{V}_\varepsilon - \dot{V}\|_N)\|u_\varepsilon\|_{Y(T, q)} + \\ &c_\delta\|V_\varepsilon - V\|_M\|u_0\|_2 + \\ &c_\delta\|V\|_M\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbf{R}^n))} \end{aligned} \quad (18)$$

再由(14)和(16)可以得到 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{Y(T, q)} = 0$. 这就完成了定理2的证明.

参考文献:

- [1] VEGA L. Schrödinger equations: poinwise converge to the initial data[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 102: 874-878.
- [2] CAZENAVE T, WEISSLER F. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s [J]. Nonl Anal, 1990, 14: 807-836.
- [3] BOURGAIN J. Refinements of Strichartz' inequality and application to 2D-NLS with critical nonlinearity[J]. Internat Math Res Notices, 1998, 5: 253-283.
- [4] HAYASHI N, OZAWA T. Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space dimension[J]. Diff Inte Equations, 1994, 2: 453-461.
- [5] KENIG C, PONCE G, VEGA L. Small solutions to nonlinear Schrödinger equations [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1993, 10: 255-288.
- [6] YAJIMA K. Existence of solutions for Schrödinger evolution equations[J]. Comm Math Phys, 1987, 110: 415-426.
- [7] ZHENG Q, YAO X H, FAN D S. Convex hypersurface and L^p

- estimates for Schrödinger equations[J]. J Func Anal, 2004, 208: 122 – 139.
- [8] YAJIMA K. A multichannel scattering theory for some time-dependent Hamiltonians, charge transfer problem[J]. Comm Math Phys, 1980, 75: 153 – 178.
- [9] IORIO R J, MARCHESIN D. On the Schrödinger equation with time-dependent electric fields[J]. Proc R Soc Edinb, 1984, 96A: 117 – 134.

Solutions for Higher-order Schrödinger Equation with Potentials

GUO Cui-hua, CUI Shang-bin

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence, uniqueness and the regularity for the solutions of the initial value problem for the higher-order Schrödinger equation with the time dependent potentials are discussed. The sufficient conditions on potential function are given so that this equation has classical solutions. Under the first assumption, the local solution is obtained by using fixed point theorem; the global solution is obtained by using the energy conservation laws. Under the second assumption, the solution is obtained by making multiplier functions.

Key words: Schrödinger equation; initial value problem; potential function



(上接第 9 页)

An Auditable Offline E-cash Scheme

LI Jin, WANG Yan-ming

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Fair tracing is one of the most important aspects in electronic cash (e-cash). An efficient auditable offline e-cash scheme is proposed in which customers have power to control the deanonymization without the third party. The advantage of this scheme is that the bank can directly find the owner when owner tracing is necessary. Another contribution is that an efficient multi-denominations auditable offline e-cash scheme is first presented, in which the bank only needs one private key to issue different denominations.

Key words: e-cash; fair tracing; auditability; multi-denomination