

搜索不同 TSP 最佳路径的多蚁群优化算法*

吴 红, 王远世

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 提出一种搜索不同 TSP 最佳路径的多蚁群优化算法。在该算法中, 各蚁群中的蚂蚁被其所在蚁群的气味吸引的同时, 亦受到其它蚁群气味的排斥。具体表现为: 第 1 个蚁群的蚂蚁不受其它蚁群气味的影响; 第 2 个蚁群只受第一个蚁群的排斥; 第 3 个蚁群只受第 1 个蚁群和第 2 个蚁群的排斥, …, 最后一个蚁群受其前面每一个蚁群的排斥。该算法通过引入依时间变化的气味蒸发系数, 证明了若系统存在不同的最佳路径, 则算法中的不同蚁群以概率为 1 地收敛于不同的最佳路径。

关键词: 蚁群优化算法; 旅行商问题; 网络路由

中图分类号: O175.24 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 04-0013-04

1 问题的引入

旅行商问题 (Travelling Salesman Problem, 简称 TSP) 是搜索最佳路径算法要解决的经典问题之一。在 TSP 中, 已知各城市间的路程, 问题是如何找到一条最短路径, 使得旅行商能经过每一个城市且只经过一次。随着蚁群优化算法 (Ant Colony Optimization, ACO) 被广泛应用于搜索 TSP 的最佳路径^[1-2], 寻找不同最佳路径的问题变得日益突出^[3]。事实上, 由于单条路径所能承载的负荷有限, 当某条最佳路径的负荷接近于其极限时, 寻找一条完全不同的最佳路径就显得极为重要^[4]。为解决这一问题, 文[4]提出一种 ACO 算法, 其中有多蚁群, 它们之间通过气味相互排斥。但是, 由于该算法中的气味蒸发系数为常数, 由文[5]中的讨论知, 它不能保证一定可以找到最佳路径。类似地, 文[6, 7]中的算法也不能保证一定可以找到最佳路径。

本文提出的多蚁群优化算法, 通过引入依时间变化的气味蒸发系数, 证明了若系统存在不同的最佳路径, 则算法中的不同蚁群以概率为 1 地收敛于不同的最佳路径。

2 多蚁群优化算法

本节给出多蚁群优化算法。记 v 为各城市组成的集合, ϑ 表示城市间的有向路径集, 故 TSP 的搜索区域为有向图 (v, ϑ) 。记 M 和 m 分别为蚁群的

个数和各蚁群中蚂蚁的个数, (h, k) 为第 h 个蚁群中的第 k 只蚂蚁。在本算法中, 第 h 个蚁群只被第 l 个蚁群排斥, 其中 $1 < h \leq M, 1 \leq l < h$ 。记 (i, j) 为从城市 i 到城市 j 的有向边, $\tau_y^h(n)$ 为第 n 轮开始时蚁群 h 在 (i, j) 上的气味值。 $\tau_y^h(1) > 0$ 为事先给定。对 $n > 1$, 在第 n 轮结束时, 即各蚂蚁完成其在本轮的旅行后, 蚁群 h 在第 $n+1$ 轮开始时的气味值定义如下:

若存在 $l, 1 \leq l < h$, 使得 $(i, j) \in \varphi^l(n)$, 则

$$\tau_y^h(n+1) = 0;$$

若 $(i, j) \notin \varphi^l(n), 1 \leq l < h$, 但 $(i, j) \in \varphi^h(n)$, 则

$$\tau_y^h(n+1) = \rho_n \tau_y^h(n) + (1 - \rho_n) \frac{Q}{L(\varphi^h(n))};$$

在其它情形, 则

$$\tau_y^h(n+1) = \max\{\rho_n \tau_y^h(n), \prod_{k=1}^n \rho_k \tau_y^h(1)\} \quad (1)$$

其中, $\varphi^h(n)$ 为蚁群 h 在第 n 轮后找到的最佳路径, 它被贮存在一个列表中, 当该群落的蚂蚁找到更短的路径时会被更换。参数 $\rho_n (0 < \rho_n < 1)$ 是时间 n 的函数, 而 $1 - \rho_n$ 表示在第 n 轮时气味的蒸发比例。因此, “ $\rho_n \tau_y^h(n)$ ” 表示蒸发后的气味余值。

“ $(1 - \rho_n) \frac{Q}{L(\varphi^h(n))}$ ” 表示气味的加强值。 $Q > 0$ 为常数。 $\varphi^h(n)$ 的长度表示为 $L(\varphi^h(n))$ 。

在第 n 轮, 蚂蚁 (h, k) 选择边 (i, j) 的概率定义为

* 收稿日期: 2004-08-26

基金项目: 教育部归国留学人员基金及广东省自然科学基金博士科研启动资助项目(04300594)

作者简介: 吴红 (1966 年生), 女, 副教授; E-mail: zsuwh@163.com

$$P_{ij}^{hk}(n) = \begin{cases} \frac{\pi_y^h(n)}{\sum_{l \notin \text{tabu}^{hk}(i,n)} \pi_d^h(n)}, & j \notin \text{tabu}^{hk}(i,n), \\ 0, & j \in \text{tabu}^{hk}(i,n) \end{cases} \quad (2)$$

$$\pi_y^h(n) = [\tau_y^h(n)]^\alpha d_{ij}^{-\beta}, \quad (3)$$

其中, $\text{tabu}^{hk}(i,n)$ 表示蚂蚁 (h,k) 在第 n 轮到达城市 i 之前所经城市的列表。 d_{ij} 表示 (i,j) 的长度, $\alpha(\alpha > 0)$ 表示气味的重要程度, $\beta(\beta > 0)$ 表示路程长度的重要程度。

3 主要结论

引理 1 记 $L_{\min}$ 为最佳路径的长度, 记

$$H = \max_{1 \leq h \leq M, (i,j) \in \vartheta} \{\tau_y^h(1), Q/L_{\min}\}$$

则 $\{\tau_y^h(n): (i,j) \in \vartheta, 1 \leq h \leq M, n = 1, 2, \dots\}$ 有上界 H

证明 由 (1) 式知在第 n 轮, 有

$$(1 - \rho_n) \frac{Q}{L(\varphi^h(n))} \leq \frac{Q}{L_{\min}}$$

故当 $(i,j) \in \vartheta, 1 \leq h \leq M, n \geq 1$ 时, $\tau_y^h(n) \leq H$ 。

记 d 和 D 为 ϑ 中最短和最长边的长度, 由引理 1 知

$$\pi_y^h(n) \leq [\tau_y^h(n) + 1]^\alpha d_{ij}^{-\beta} \leq (H + 1)^\alpha d^{-\beta}$$

以下记 $G = (H + 1)^\alpha d^{-\beta}$ 。

引理 2 对 $(i,j) \in \vartheta, 1 \leq h \leq M, n = 1, 2, \dots$

$$\pi_y^h(n) \leq G$$

引理 3 设

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \rho_n) = +\infty \quad (4)$$

$$\rho_n \geq \frac{\log n}{\log(n+1)}, n \geq N \quad (5)$$

其中 $N \geq 1$ 。则第 1 个蚁群以概率为 1 收敛于最佳路径。即, 存在 ϑ 中的最佳路径 φ_{opt}^1 及整数 $N_1 (N_1 \geq N)$ 使得当 $n \geq N_1$ 时, $\varphi^1(n) = \varphi_{\text{opt}}^1$ 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_y^1(n) = \begin{cases} \frac{Q}{L(\varphi_{\text{opt}}^1)}, & (i,j) \in \varphi_{\text{opt}}^1, \\ 0, & (i,j) \notin \varphi_{\text{opt}}^1 \end{cases} \quad (6)$$

证明 记 F 表示事件“蚁群 1 从未穿越最佳路径”。记 E_n 表示事件“蚁群 1 在第 n 轮未穿越最佳路径”。则对任意正整数 S , 有

$$\varphi_{\text{opt}}^1 \text{ 从未被穿越} \Rightarrow \varphi_{\text{opt}}^1 \text{ 在第 } n \text{ 轮未被穿越}, \\ n \leq S \quad (7)$$

因此有

$$P(\varphi_{\text{opt}}^1 \text{ 从未被穿越}) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n) \leq \prod_{n=1}^{+\infty} P(\varphi_{\text{opt}}^1 \text{ 第 } n \text{ 轮未被穿越} | \varphi_{\text{opt}}^1 \text{ 第 } l \text{ 轮未被穿越}, l < n) \quad (8)$$

由 (1) 式有

$$\tau_y^1(n) \geq \prod_{s=1}^{n-1} \rho_s \prod_{s=1}^{n-1} \frac{\log s}{\log(s+1)} \quad \tau_y^1(1) = \frac{4}{\log n}$$

其中, $A = [\prod_{s=1}^{N-1} \rho_s] \tau_y^1(1) \log N$

又由 (3) 式知 $\pi_y^1(n) \geq (\frac{A}{\log n})^\alpha D^{-\beta}$, 故蚂蚁 $(1,k)$ 在第 $n (n \geq N)$ 轮穿越 (i,j) 的概率为

$$P_{ij}^{1k}(n) \geq \frac{(\frac{A}{\log n})^\alpha D^{-\beta}}{|\vartheta| + G} = \frac{B}{(\log n)^\alpha}$$

其中, $B = \frac{A^\alpha}{|\vartheta| + GD^\beta}$ 。

因 φ_{opt}^1 的有向边个数为 $|\vartheta|$, 故蚂蚁 $(1,k)$ 在第 $n (n \geq N)$ 轮穿越 φ_{opt}^1 的概率为

$$\prod_{(i,j) \in \varphi_{\text{opt}}^1} P_{ij}^{1k}(n) \geq \frac{B^{|\vartheta|}}{(\log n)^{\alpha|\vartheta|}}, \\ P(E_n) \leq 1 - \frac{B^{|\vartheta|}}{(\log n)^{\alpha|\vartheta|}}$$

故由式 (8), 有

$$P(\varphi_{\text{opt}}^1 \text{ 从未被穿越}) \leq \prod_{n=N}^{+\infty} (1 - \frac{B^{|\vartheta|}}{(\log n)^{\alpha|\vartheta|}}) \quad (9)$$

记 $\delta = \prod_{n=N}^{+\infty} (1 - \frac{B^{|\vartheta|}}{(\log n)^{\alpha|\vartheta|}})$, 则

$$\log \delta = \sum_{n=N}^{+\infty} \log[1 - \frac{B^{|\vartheta|}}{(\log n)^{\alpha|\vartheta|}}]$$

因当 $0 < x < 1$ 时, $\log(1-x) \leq -x$, 故

$$\log \delta \leq - \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{B^{|\vartheta|}}{(\log n)^{\alpha|\vartheta|}}$$

因对任意常数 c , 当 x 足够大时, $(\log x)' \leq x$, 故存在正常数 $N_0 (N_0 \geq N)$ 使得当 $n \geq N_0$ 时, $(\log n)^{\alpha|\vartheta|} \leq n$ 。由

$$\sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{B^{|\vartheta|}}{n} = +\infty$$

有

$$\log \delta \leq - \sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{B^{|\vartheta|}}{n} = -\infty$$

故 $\delta = 0$ 。由 (9) 有 $P(\varphi_{\text{opt}}^1 \text{ 不被穿越}) = 0$ 。因此事件“ φ_{opt}^1 不被穿越”的概率为零。记 φ_{opt}^1 表示蚁群 1 在第 N_1 轮穿越的最佳路径。

由 (1) 式知, 蚁群 1 在第 N_1 轮后在边 $(i,j) \notin \varphi_{\text{opt}}^1$ 上的气味值只会蒸发而不会被加强, 故有

$$\tau_y^1(N_1 + r) = \prod_{n=N_1}^{N_1+r-1} \rho_n \tau_y^1(N_1), r = 1, 2, \dots$$

由 (4) 式有

$$\log \prod_{n=1}^{+\infty} \rho_n \leq - \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \rho_n) = -\infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tau_y^1(N_1 + r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{n=N_1}^{N_1+r-1} \rho_n = 0 \quad (10)$$

由(1)式, 对 $(i, j) \notin \varphi_{\text{opt}}^1$ 及 $r = 1, 2, \dots$, 有

$$\tau_y^1(N_1 + r) = \prod_{n=\lambda_1}^{\lambda_1+r-1} \rho_n \tau_y^1(N_1) + \frac{Q}{L(\varphi_{\text{opt}}^1)} \sum_{k=0}^{r-1} (1 - \rho_{\lambda_1+k}) \prod_{l=k+1}^{r-1} \rho_{\lambda_1+l} \quad (11)$$

由(10)式有:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{n=\lambda_1}^{\lambda_1+r-1} \rho_n \tau_y^1(N_1) = 0 \quad (12)$$

记 $a_r = \sum_{k=0}^{r-1} (1 - \rho_{\lambda_1+k}) \prod_{l=k+1}^{r-1} \rho_{\lambda_1+l}$, $r = 1, 2, \dots$,

由(11)式有

$$\tau_y^1(N_1 + r + 1) = \prod_{n=\lambda_1}^{\lambda_1+r} \rho_n \tau_y^1(N_1) + \frac{Q}{L(\varphi_{\text{opt}}^1)} a_{r+1} \quad (13)$$

再由(1)式有

$$\begin{aligned} \tau_y^1(N_1 + r + 1) &= \rho_{\lambda_1+r+1} \tau_y^1(N_1 + r) + \\ (1 - \rho_{\lambda_1+r+1}) \frac{Q}{L(\varphi_{\text{opt}}^1)} &= \prod_{n=\lambda_1}^{\lambda_1+r+1} \rho_n \tau_y^1(N_1) + \\ \rho_{\lambda_1+r+1} \frac{Q}{L(\varphi_{\text{opt}}^1)} a_r &+ (1 - \rho_{\lambda_1+r+1}) \frac{Q}{L(\varphi_{\text{opt}}^1)} \end{aligned}$$

故有

$$a_{r+1} - a_r = (1 - \rho_{\lambda_1+r+1})(1 - a_r) \quad (14)$$

因 $a_1 = 1 - \rho_{\lambda_1}$, 故对 $r = 1, 2, \dots$, 有

$$a_r < 1, a_{r+1} - a_r > 0$$

因此存在 $0 < a_0 \leq 1$ 使得

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} a_r = a_0$$

下证 $a_0 = 1$ 。设 $a_0 < 1$, 则对 $r \geq 1$, 有

$$1 - a_r > 1 - a_0 > 0$$

由(14)式有

$$\sum_{r=1}^R (a_{r+1} - a_r) > (1 - a_0) \sum_{r=1}^R (1 - \rho_{\lambda_1+r+1})$$

由(4)式有

$$\sum_{r=1}^{+\infty} (1 - \rho_{\lambda_1+r+1}) = +\infty$$

这与

$$\sum_{r=1}^{+\infty} (a_{r+1} - a_r) = \lim_{R \rightarrow +\infty} (a_R - a_1) = a_0 - a_1 < 1$$

矛盾。故有 $a_0 = 1$ 。由(12)和(13)式有

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tau_y^1(N_1 + r) = \frac{Q}{L(\varphi_{\text{opt}}^1)} a_0 = \frac{Q}{L(\varphi_{\text{opt}}^1)}$$

引理4 设条件(4)和(5)成立。又设在 ϑ 中存在2条完全不同的(没有共同边)最佳路径。记 φ_{opt}^1 表示蚁群1在第 N_1 轮穿越的最佳路径。记 $\vartheta^1 = \vartheta - \varphi_{\text{opt}}^1$ 。则第2个蚁群以概率为1收敛于 ϑ^1 中的最佳路径

证明 由(1)式知

$$\tau_y^2(n) = 0 \quad n \geq N_1, (i, j) \in \varphi_{\text{opt}}^1$$

由于在 ϑ^1 中至少存在一条最佳路径, 因此由(2)式知对每条边 $(i, j) \in \varphi_{\text{opt}}^1$, 蚁群2在第 n ($n \geq N_1$) 轮穿越的概率为零。即, 当 $n \geq N_1$ 时, 蚁群2穿越 φ_{opt}^1 的概率为零。因此, 可以只考虑蚁群2在 ϑ^1 中的行为。类似于引理3的证明, 知第2个蚁群以概率为1收敛于 ϑ^1 中的最佳路径。

类似于引理3的证明, 有本文定理。

定理 设(4)和(5)式成立。又设在 ϑ 中存在 M 条完全不同的(没有共同边)最佳路径。则对 $1 \leq h \leq M$, 蚁群 h 以概率为1收敛于最佳路径 φ_{opt}^h , φ_{opt}^h 位于集合 $\vartheta^{h-1} = \vartheta - \bigcup_{l=1}^{h-1} \varphi_{\text{opt}}^l$ 。

推论 设(4)和(5)式成立。记 φ_{opt}^1 表示蚁群1在第 N_1 轮穿越的最佳路径。记 $\vartheta^1 = \vartheta - \varphi_{\text{opt}}^1$ 。若在 ϑ^1 中存在完整的路径, 则蚁群2以概率为1收敛于 ϑ^1 中的最佳路径 φ_{opt}^2 , 该路径与 φ_{opt}^1 完全不同。

参考文献:

- [1] COLORNI A, DORIGO M, MANIEZZO V. Distributed optimization by ant colonies[J]. Proc ECAL91-European Conf on Artificial Life. Paris: Elsevier Publishing, 1991: 134 - 142.
- [2] COLORNI A, DORIGO M, MANIEZZO V. An investigation of some properties of an ant algorithm[J]. Proc the Parallel Problem Solving from Nature Conf. Brussels: Elsevier Publishing, 1992: 509 - 520.
- [3] SIM K, SUN W. Ant colony optimization for routing and load-balancing: survey and new directions[J]. IEEE Trans on Sys Man Cybernetics A, 2003, 33(5): 560 - 572.
- [4] VARELA N, SINCLAIR M. Ant colony optimization for virtual-wavelength-path routing and wavelength allocation[J]. Proc Congress Evolutionary Computation, 1999: 1809 - 1816.
- [5] GUTJAHN W. ACO algorithms with guaranteed convergence to the optimal solution[J]. Information Processing Letters, 2002 (82): 145 - 153.
- [6] KAWAMURA H, YAMAMOTO M, SUZUKI K, et al. Multiple ant colonies algorithm based on colony level interactions[J]. IEICE Trans Fundamentals, 2000, E83(2): 371 - 379.
- [7] REINELT G. The traveling salesman-computational solutions for TSP applications[C]. Lecture Notes in Computer Science 840, Berlin: Springer-Verlag, 1994.

(下转第19页)

- Sci, 1982(11):341 – 356.
- [2] 刘清著. Rough 集及 Rough 推理[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [3] 张文修, 梁怡, 吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] KRYSZKIEWICZ M. Rules in incomplete information systems [J]. Information Sciences, 1999, 113: 171 – 192.
- [5] 王国胤. Rough 集理论在不完备信息系统中的扩充[J]. 计算机研究与发展, 2002, 39(10): 1238 – 1243.
- [6] SLOWINSKI R, VANDERPOOTEN D. A generalized definition of rough approximations based on similarity [J]. IEEE Transaction on knowledge and data engineering. 2000, 12(2): 331 – 336.
- [7] NING S, WOJCIECH Z. Data based acquisition and incremental modification of classification rules [J]. Computational Intelligence, 1995, 11(2): 357 – 370.
- [8] KRYSZKIEWICZ M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112: 39 – 49.

General Discussion about the True Property of Rules and Formalized Algorithm for True Rules

YE Xiao-ping, JI Yong-jie, HE Hua, SHEN Qi-chao

(Department of Computer Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The general concepts of the true property of decision rules based on incomplete information systems are studied and an unified algorithm for extracting optimal decision rules which are generally true is discussed in this paper. At first, the basic considerations about incomplete information systems are researched, and then the general frame of the true property of decision rules is discussed and the formalized concept of generalized decision vector is inducted based on the generally true meaning of rules. At last, a formalized algorithm for extracting optimal decision rules is proposed based on the above concepts.

Key words: incomplete decision-making systems; rough set; true property of rules; formalized algorithm for true rules

(上接第 15 页)

A Multiple Ant Colonies Optimization Algorithm for Finding Different Optimal Tours in the TSP

WU Hong, WANG Yuan-shi

(School of Mathematics and Computational Sciences, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A multiple ant colonies optimization algorithm for the TSP is presented. While each ant is attracted by the pheromone of its own colony, there exists repulsion in the colony-level interactions; the first colony is not affected by other colonies; the second colony is only repelled by the first colony; the third colony is only repelled by the first and the second colonies, ... Inductively, the final colony is repelled by all the colonies before it. By introducing a time – dependent evaporation rate into the algorithm, it is presented that if there exist different optimal tours, each of the colonies is guaranteed with probability one to converge and find a different optimal tour.

Key words: ant colony optimization; travelling salesman problem; network routing