

# 软粘土地基非线性一维大变形固结的有限差分法分析<sup>\*</sup>

刘祚秋, 周翠英

(中山大学应用力学与工程系 // 中山大学地下工程与信息技术研究中心, 广东 广州 510275)

**摘 要:** 在几何非线性分析的基础上考虑软粘土的非线性本构关系, 采用张量指标记号推导出物质描述的一维非线性大变形固结的控制方程, 采用有限差分方法对非线性控制方程进行数值求解, 编制了计算程序。数值计算结果表明: 在相同的非线性本构关系前提下, 软粘土地基的非线性大变形固结沉降始终小于非线性小变形固结沉降; 且随着荷载水平的增大, 大变形固结和小变形固结的沉降量的差别越来越大, 几何非线性对软粘土地基沉降影响是不可忽略的。

**关键词:** 非线性; 大变形; 一维固结; 软土地基; 有限差分法

**中图分类号:** TU43; O241.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2005)03-0025-04

对于软粘土地基, 当荷载较重、地基土体变形较大时, 一维小变形固结分析可能会带来较大的误差。在国外, Mikasa<sup>[1]</sup> 和 Gibson<sup>[2]</sup> 首先开始一维大变形固结理论研究, 并致力于把小变形固结理论推广到更普遍的大变形固结理论。此后, Gibson 和其他学者进行了长期深入的研究, 包括数值分析、室内 CRD 试验和现场试验等, 形成了较为完整的理论体系<sup>[3,4]</sup>。虽然从形式看, Gibson 一维大变形固结理论是完善的, 但其计算结果更多体现的还是材料的非线性, 若要真正反映土体固结的几何非线性宜采用连续介质力学的大变形理论<sup>[5,6]</sup>。Carter<sup>[7]</sup> 等首先将非线性连续介质力学中的大变形理论引入土体固结分析。目前, 国内外对一维大、小变形固结理论的沉降计算结果的比较还存在分歧, 不同的研究人员得到的计算结果出现令人难以预料的较大差异<sup>[8]</sup>。本文在几何非线性分析的基础上考虑软粘土的非线性本构关系, 推导出物质描述的一维非线性大变形固结的控制方程, 采用有限差分方法对非线性控制方程进行数值求解, 数值计算结果表明: 非线性大变形固结的沉降始终小于小变形固结的沉降, 且当荷载水平  $q/E_0 < 0.1$ , 大变形固结的表面最终沉降比相对小变形固结表面最终沉降比要小于 10%, 因此可以不考虑大变形效应的影响。随着荷载水平的增大, 大变形和小变形的沉降量的差别越来越大, 最终沉降量的结果相差很远, 此时, 几何

非线性对地表沉降的影响是很明显的, 也是不可忽略的。

## 1 以位移为控制变量的物质描述的一维非线性大变形固结方程

### 1.1 物质描述的大变形问题的基本方程

1.1.1 平衡方程 众所周知, 应力是与变形相关联的, 而就应力而言, 只有在变形后的构形上定义应力张量才有实际的物理意义。变形体是在外载荷作用下发生变形之后达到平衡的, 因此用变形后的应力状态即现时构形上的欧拉应力来表达变形体的平衡方程是很自然的。当采用空间描述时, 用欧拉应力表示的平衡方程为<sup>[9]</sup>

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i = 0$$

其中,  $f_i$  为现时构形上的体力。虽然此方程在形式上与小变形假定的平衡方程无差别, 但实质上是不同的。

当采用物质描述时, 定义在初始构形区域上用拉格朗日应力表示的平衡方程为<sup>[10]</sup>

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial X_j} + f_{0i} = 0$$

其中,  $f_{0i}$  为初始构形上的体力。利用拉格朗日应力  $L_{ij}$  与克希霍夫应力张量  $S_{ij}$  的转换关系, 将变形梯度用位移梯度表示, 则平衡方程为

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2004-10-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59809037), 广东省自然科学基金资助项目(980274), 广东省科技攻关专项基金资助项目(2001B30903)

作者简介: 刘祚秋(1965年生), 男, 博士, 讲师; 通讯联系人: 周翠英, E-mail: eeslzc@zsu.edu.cn

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[ S_{ij} \left( \delta_j + \frac{\partial u_j}{\partial X_l} \right) \right] + f_{0i} = 0 \tag{1}$$

对于土体的一维大变形固结，拉格朗日坐标系选取如图 1 所示，应力正负号的规定采用土力学的惯用规定，则用克希霍夫应力张量  $S_{ij}$  表示的平衡方程为

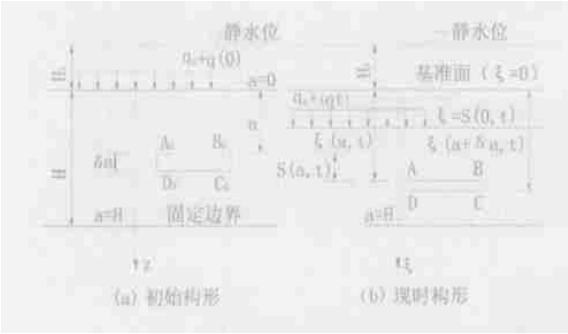


图 1 一维大变形固结荷载及边界条件

Fig 1 load and boundary condition of one-dimensional large deformation consolidation

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left[ S_{11} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X_1} \right) \right] - f_{01} = 0 \tag{2}$$

设  $n$  为土体在现时构形的孔隙率， $\gamma_s$  为土颗粒容重， $\gamma_w$  为水的容重，现时构形下的土体容重为  $f_1 = n\gamma_w + (1 - n)\gamma_s$ ，物质描述时，土体一维固结的平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left[ S_{11} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X_1} \right) \right] - \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X_1} \right) [n\gamma_w + (1 - n)\gamma_s] = 0 \tag{3}$$

1.1.2 本构方程 本构方程中应使用客观度量<sup>[9,10]</sup>。为了得到物质描述下控制方程，必须建立物质描述的本构方程。而克希霍夫应力率张量  $S_{ij}$  和格林应变率张量  $E_{ij}$  都是与物体刚体运动无关的客观张量，可以用在物质描述的本构方程中。

Jaumann 应力率  $\dot{S}_{ij}$  和变形率张量  $D_{kl}$  是一个不受刚体运动影响的客观张量，在空间坐标系中可建立如下关系： $\dot{S}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl}$ ，其中， $C_{ijkl}$  为空间描述的本构张量，可按通常小变形时的本构理论确定。通过变换得到克希霍夫应力率张量  $S_{ij}$  和变形率张量  $D_{kl}$  之间的关系式，再把变形率张量  $D_{kl}$  表示成格林应变率张量  $E_{ij}$ ，得到克希霍夫应力率张量  $S_{ij}$  和格林应变率张量  $E_{kl}$  之间的关系式，即

$$S_{ij} = |J| \left[ \frac{\partial X_l}{\partial x_p} \frac{\partial X_l}{\partial x_q} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} C_{pqmn} + \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_m} S_{ij} - \frac{\partial X_j}{\partial x_q} \frac{\partial X_l}{\partial x_q} S_{ik} - \frac{\partial X_l}{\partial x_p} \frac{\partial X_l}{\partial x_p} S_{jk} \right] E_{kl} \tag{4}$$

简写为如下形式  $S_{ij} = C_{ijkl}^0 E_{kl}$ ，其中，为考虑刚性旋转不变性的影响，可用于大变形条件下按物质描述的本构张量。再将 (4) 式中的欧拉应力更换成克希霍夫应力张量  $S_{ij}$ ，即

$$C_{ijkl}^0 = |J| \left[ \frac{\partial X_l}{\partial x_p} \frac{\partial X_l}{\partial x_q} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} C_{pqmn} + \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_l}{\partial x_m} S_{ij} - \frac{\partial X_j}{\partial x_q} \frac{\partial X_l}{\partial x_q} S_{ik} - \frac{\partial X_l}{\partial x_p} \frac{\partial X_l}{\partial x_p} S_{jk} \right] \tag{5}$$

从上式都可以看出， $C_{ijkl}^0$  和现时构形的欧拉应力  $\sigma_{ij}$  或定义在初始构形上的克希霍夫应力  $S_{ij}$  有关，只要知道  $C_{ijkl}$ ，就可以确定  $C_{ijkl}^0$ 。若不考虑刚性旋转不变性的影响，则略去本构张量中的应力项的影响。

对于土体的一维大变形固结，当不考虑刚性旋转不变性的影响时，空间描述的本构方程为  $\sigma'_{11} = E_s a_{11}$ ，其中， $\sigma'_{11}$  为欧拉有效应力， $a_{11}$  为欧拉应变， $E_s$  为土体的压缩模量，当考虑土体压缩的非线性性质时，则  $E_s = f(\sigma'_{11})$ 。因此，物质描述的本构方程为  $S'_{11} = E_s^0 E_{11}$ ，其中， $S'_{11}$  为克希霍夫有效应力， $E_{11}$  为格林应变，且  $E_s^0 = \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)^3 E_s$ 。

1.2 大变形固结的渗流连续方程

对于一维土体的大变形固结，可直接从质量守恒定理出发推出连续性方程。由土颗粒的质量守恒，有：

$$\frac{\partial}{\partial t} [\gamma_s (1 - n)] + \nabla \cdot [\gamma_s (1 - n) v_s] = 0$$

由孔隙水的质量守恒，有：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma_w n) + \nabla \cdot (\gamma_w n v_w) = 0$$

式中， $n$  为孔隙率， $v_w$  和  $v_s$  分别为孔隙水和土粒的真实渗流运动速率， $\gamma_s$  为土粒容重， $\gamma_w$  为孔隙水容重，忽略土颗粒和孔隙水的自身的压缩，则  $\gamma_s$  和  $\gamma_w$  为常数。因此，

$$\nabla \cdot [n (v_w - v_s)] + \nabla \cdot v_s = 0 \tag{6}$$

若定义  $n (v_w - v_s)$  为土体的平均渗流速度，则采用物质描述时，达西定律可写为

$$v(X_1) = - \frac{k_0}{\gamma_w} \frac{\partial P_{Lu}}{\partial X_1} = - \frac{k_0}{\gamma_w} \left[ \frac{\partial}{\partial X_l} \left( P_{0w} \frac{\partial x_1}{\partial X_l} \right) - \gamma_w \frac{\partial x_1}{\partial X_l} \right] \tag{7}$$

其中， $k_0$  为物质描述时的渗透系数， $P_{Lu}$  为定义在初始构形上与拉格朗日应力相适应的超静孔隙水压， $P_{0w}$  为定义在初始构形上与克希霍夫应力相适应的孔隙水压力。由 (6) 式可得  $v + v_s = f(t)$ ，其中， $f(t)$  为时间  $t$  的函数，由边界的排水条件

决定。对只有土层上表面排水情况，在任何时间下表面的  $v_w$  和  $v_s$  都是零，故  $f(t)=0$ 。从而物质描述下的连续性方程为

$$-\frac{k_0}{\gamma_w}\left[\frac{\partial}{\partial X_1}\left(P_{0w}\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)-\gamma_w\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right]=f(t)-\frac{\partial u}{\partial t} \quad (8)$$

1.3 以位移为控制变量的物质描述的一维大变形固结方程

物质描述的有效应力原理在形式上与小变形的有效应力原理类似，即  $S_{ij}=S'_{ij}+\delta_{ij}P_{0w}$ ，其中， $S'_{ij}$ 为相应于克希霍夫应力张量  $S_{ij}$  的有效应力张量。对于一维问题，则为  $S_{11}=S'_{11}+P_{0w}$ 。由土体一维大变形的平衡方程本构方程连续性条件及有效应力原理可得物质描述下的一维大变形固结的控制方程为

$$-\frac{k_0}{\gamma_w}\left[1+\frac{\partial u}{\partial X_1}\right](1-n)(\gamma_s-\gamma_w)+\frac{k_0}{\gamma_w}\frac{\partial}{\partial X_1}\cdot\left[\left[1+\frac{\partial u}{\partial X_1}\right]E_s^0E_{11}\right]=f(t)-\frac{\partial u}{\partial t} \quad (9)$$

对于单面排水条件， $f(t)=0$ ，并将孔隙率  $n$  表示成位移  $u$  的函数，即

$$\frac{K_0(\gamma_s-\gamma_w)}{\gamma_w(1+e_0)}+\frac{k_0}{\gamma_w}\frac{\partial}{\partial X_1}\cdot\left\{\left[1+\frac{\partial u}{\partial X_1}\right]^{-2}\left[\frac{\partial u}{\partial X_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right)^2\right]E_s\right\}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad (10)$$

当  $E_s=F(\sigma'_{11})$  不为常数时，而考虑土体压缩的非线性性质，(9) 式为

$$\frac{K_0(\gamma_s-\gamma_w)}{\gamma_w(1+e_0)}+\frac{k_0E_s^0}{\gamma_f}\cdot\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}}{\frac{\partial X_1^2}}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad (11)$$

其中， $E_s^0$  可从  $E_s=F(\sigma'_{11})$  中迭代求解出，边界条件和初始条件为

$$u(X_1,t)|_{X=H}=0;\frac{\partial u(X_1,t)}{\partial X}|_{X=0}=a$$
$$u(X_1,t)|_{t=0}=0 \quad (12)$$

其中， $H$  为软土地基厚度， $a$  为荷载  $q$  作用下地基上表面处的位移梯度。

2 一维非线性大变形固结方程的数值分析

当  $E_s$  不为常数时，且土体非线性本构关系取  $E_s=E_0+n\sigma'^{1/q}$ ，其中  $n$  为  $\frac{\sigma'}{\epsilon}\sim\sigma'$  压缩曲线的斜率，则非线性一维大变形固结方程 (11) 式变为

$$\frac{k_0(\gamma_s-\gamma_w)}{\gamma_w(1+e_0)}+\frac{k_0E_0}{\gamma_f}\cdot\frac{\left[1+\frac{\partial u}{\partial X_1}\right]^{-3}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}}{\left\{1+n\left[1+\frac{\partial u}{\partial X_1}\right]^{-2}\left[\frac{\partial u}{\partial X_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right)^2\right]\right\}^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad (13)$$

简写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=G\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial T_v}-G\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{H^2(\gamma_s-\gamma_w)}{E_s(1+e_0)} \quad (14)$$

边界条件和初始条件为

$$u(z,T_v)|_{z=1}=0,$$
$$\frac{1}{H}\frac{\partial u(z,T_v)}{\partial z}|_{z=0}=\alpha,$$
$$u(z,T_v)|_{T_v=0}=0 \quad (15)$$

其中，

$$z=\frac{X_1}{H},\quad T_v=\frac{k_0E_0}{H^2\gamma_w}t,$$
$$\alpha=\left[\frac{1+n\frac{q}{E_0}}{1+2\frac{q}{E_0}+n\frac{q}{E_0}}\right]^{\frac{1}{2}}-1 \quad (16)$$

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left[1+\frac{1}{H}\frac{\partial u}{\partial t}\right]^3\cdot\left\{1+n\left[1+\frac{1}{H}\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{-2}\left[\frac{1}{H}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\right\}^2 \quad (17)$$

由 (14) 式可以看出，要求出非线性一维固结控制方程的解析解是非常困难的，实际上也是不可能的。因此，对非线性方程 (14) 和初边值条件 (15)，本文采用预测—校正差分格式进行数值求解<sup>[1]</sup>。

预测格式:

$$\frac{u_{j+1}^{k+1/2}-zu_j^{k+1/2}+u_{j-1}^{k+1/2}}{h^2}=G\left(\frac{u_{j+1}^k-u_{j-1}^k}{2h}\right)\frac{u_j^{k+1/2}-u_j^k}{\tau/2}-G\left(\frac{u_{j+1}^k-u_{j-1}^k}{2h}\right)\frac{H^2(\gamma_s-\gamma_w)}{E_s(1+e_0)} \quad (18)$$

校正格式:

$$\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}+u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{2h^2}=G\left(\frac{u_{j+1}^{k+1/2}-u_{j-1}^{k+1/2}}{2h}\right)\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-G\left(\frac{u_{j+1}^{k+1/2}-u_{j-1}^{k+1/2}}{2h}\right)\frac{H^2(\gamma_s-\gamma_w)}{E_s(1+e_0)} \quad (19)$$

初边值条件为

$$u_n^k=0,\quad k=0,1,\cdots;$$
$$u_0^k=u_1^k-Hh\alpha,\quad k=1,2,\cdots;$$
$$u_j^0=0,\quad j=0,1,2,\cdots,n \quad (20)$$

其中， $h,\tau$  为空间步长及时间步长。

(18)、(19) 及 (20) 式可写成两组三对角线性方程，可用追赶法求解，本文编制了 Fortran 程序进行计算<sup>[9]</sup>。

3 结果与讨论

本文计算了软粘土地基的一维非线性大变形固结沉降 (NL) 及非线性小变形固结沉降 (NS)，图 2 为不同荷载水平  $q/E_0$  下所对应的非线性大变形和小变形固结的所产生地基表面沉降比  $s/H$  随时间因子  $T_v$  的变化曲线，从图中可以看出：

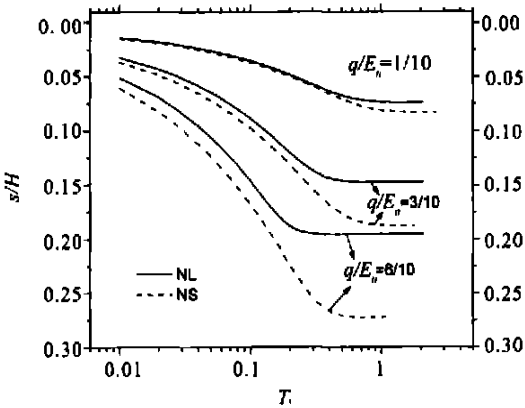


图 2 不同荷载水平  $q/E_0$  所对应的非线性大、小变形固结的表面沉降曲线

Fig 2 Surface settle curve of one-dimensional nonlinear consolidation on different load level. NS-nonlinearaz consolidation NL-nonlinear large deformation

(1) 非线性小变形固结 (NS) 产生的表面沉降比  $s/H$  在固结过程中始终大于非线性大变形固结 (NL)。

(2) 不同荷载水平  $q/E_0$  下所对应的非线性大变形和小变形固结的所产生地基表面沉降比  $s/H$  是不同的。当荷载水平  $q/E_0=0.1$  时，非线性大变形固结的表面最终沉降比相对小变形固结表面最终沉降比要小 10% 左右。

(3) 当荷载水平  $q/E_0 < 0.1$  可以不考虑大变形的效应，随着荷载水平的增大，大变形和小变形的沉降量的差别越来越大，最终沉降量的结果相差很远，此时，几何非线性对地表沉降的影响是很明显的，也是不可忽略的。

参考文献:

[ 1 ] MIKASA M. The consolidation of soft clay [ C ] . Civil Engineering in Japan, JSCE, 1965: 21—26.

[ 2 ] GIBSON R E, ENGLAND G L, HUSSEY M J L. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays (I) [ J ] . Finite nonlinear Consolidation of thin homogenous layers. Geotechnique, 1967, 17(2): 261—273.

[ 3 ] GIBSON R E, SCHIFFMAN R L, CARGILL K W. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays (II) [ J ] . Finite nonlinear Consolidation of thick homogenous layers. Canadian Geotechnical J, 1981, 18(2): 280—293.

[ 4 ] SCHIFFMAN R L, McArthur J M, GIBSON R L. Consolidation of clay layers: Hydrogeologic boundary condition [ J ] . Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1994, 120(6): 1089—1093.

[ 5 ] 谢新宇, 朱向荣, 谢康和, 等. 饱和土体一维大变形固结理论研究新进展 [ J ] . 岩土工程学报, 1997, 19(4): 30—37.

[ 6 ] 刘祚秋. 饱和软粘土地基非线性固结研究 [ D ] . 广州: 中山大学, 2004.

[ 7 ] CATER J P, SMALL J C, BOOKER J R. A theory of finite elastic consolidation [ J ] . Int. J. Solids Structures, 1977, 13: 461—478.

[ 8 ] TOWNSEND F G, MCVAY M C. SOA: Large strain consolidation predictions [ J ] . Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1990, 116(2): 222—243.

[ 9 ] 匡震邦. 非线性连续介质力学 [ M ] . 上海: 上海交通大学出版社, 2001.

[ 10 ] 谢永利. 大变形固结理论及其有限元法 [ M ] . 北京: 人民交通出版社, 1998.

[ 11 ] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法 [ M ] . 北京: 清华大学出版社, 1987.

(下转第 41 页)

[ 4 ] 李淳飞. 光学双稳态研究 20 年[ J ] . 物理, 1996, 25(5): 267— 272.

[ 5 ] BRZOZOWSKI L, SARGENT E H. Azobenzenes for photonic network applications; Third-order nonlinear optical properties [ J ] . Mate Sci Mate Elec, 2001, 12: 483— 489.

[ 6 ] 王国杰, 王晓工. 含偶氮苯生色团的树枝状大分子研究进展[ J ] . 高分子学报, 2002(3): 19— 23.

[ 7 ] HUANG Y, SUN Z, DING L, et al. A new polymeric material for optical swithing[ J ] . Appl Phys B, 1999, 68: 217.

[ 8 ] EGAMI C, SUZUKI Y, SUGIHARA O, et al. Third order resonant optical nonlinearity from *trans cis* photoisomerization of an azo dye in a rigid matrix[ J ] . Appl Phys B, 1997, 64: 471— 478.

[ 9 ] RAO D V, ARANDA F J, WILEY B J, et al. Mirrorless all-optical bistability in bacteriorhodopsin[ J ] . Appl Phys Lett, 1993, 63(11): 1489— 1491.

The Theoretical Study of Steady-state Mirrorless Optical Bistability Based on Photoisomerization of Azobenzene Molecules

ZHANG Wei, QIN Shu ying, WU Tian hong, WANG Hui

(The State Key Laboratory of Photoelectronic Materials and Technologies, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** A theoretical study of the steady mirrorless optical bistability, based on the photoisomerization of azobenzene, was reports. Firstly, the transmissions due to the saturated absorption of azobenzene molecules have been calculated. Then, the mirrorless optical bistability processes have been calculated under different absorption cross sections  $\sigma_T$  and  $\sigma_C$  for trans and cis azobenzene molecules respectively. Finally, the thermal constant  $K$  and its influence on the optical bistability has been discussed.

**Key words:** azobenzene molecules; mirrorless optical bistability; photoisomerization

(上接第 28 页)

One dimensional Non-linear Large Deformation Consolidation Analysis of Soft Clay Foundation by FDM

LIU Zuo qiu, ZHOU Cui ying

(Department of Applied Mechanics and Engineering //Research Center of Underground Engineering and Information Technology, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** The soft clay 's nonlinear constitutive relation on the basis of geometrical nonlinear analysis is considered, nonlinear control equation of one dimensional consolidation with large deformation is deduced using tensor index token method. The numerical solution is solved with finite difference method (FDM), and correspond computer program is worked out. From the numerical result of the program, consolidation settlement of nonlinear large deformation is always smaller than that of nonlinear small deformation in soft clay foundation. With increasing of load level the difference between the large and small deformation of consolidation is more and more obvious, the influence to the total surface settlement of large deformation shouldn't be ignored.

**Key words:** non-linear; large deformation; one dimensional consolidation; soft clay foundation; FDM