

# 有限群的 $\pi$ -拟正规嵌入子群与 $p$ -幂零性\*

韦华全<sup>1,2</sup>, 卢若飞<sup>3</sup>, 刘晓蕾<sup>4</sup>

- (1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275;
2. 广西师范学院数学系, 广西 南宁 530001;
3. 广西民族学院数学系, 广西 南宁 530006;
4. 山西财经大学数学系, 山西 太原 030006)

**摘要:** 通过分析群阶和特殊素因子, 利用 Sylow 子群二次极大子群的  $\pi$ -拟正规嵌入性质, 得到: 设  $H$  是有限群  $G$  的正规子群使得  $G/H$  为  $p$ -幂零群,  $P$  是  $H$  的一个 Sylow  $p$ -子群, 这里  $p$  是  $|G|$  的一个素因子. 若  $P$  的二次极大子群均在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入且下列条件之一满足, 则  $G$  是  $p$ -幂零: (1)  $(|G|, p^2 - 1) = 1$ ; (2)  $N_G(P)/C_G(P)$  是  $p$ -群.

**关键词:** 有限群;  $p$ -幂零;  $\pi$ -拟正规嵌入

**中图分类号:** O152 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 04-0001-04

本文之群恒为有限,  $\pi(G)$  表示群  $G$  的阶  $|G|$  的素因子集.

设  $M$  是群  $G$  的极大子群. 如果  $M_1$  是  $M$  的极大子群, 那么称  $M_1$  为  $G$  的二次极大子群. 群的 Sylow 子群的二次极大子群的某种嵌入性质常给其结构提供重要的信息. 例如, 李样明等<sup>[1]</sup>证明了:

设  $G$  是有限群,  $p$  是  $|G|$  的最小素因子,  $P$  是  $G$  的一个 Sylow  $p$ -子群. 若  $P$  的二次极大子群均在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入且  $G$  与  $A_4$  无关, 则  $G$  是  $p$ -幂零群.

群  $G$  的子群  $H$  称为在  $G$  中  $\pi$ -拟正规, 如果对于  $G$  的任意 Sylow 子群  $S$ ,  $H$  与  $S$  可交换, 即  $HS = SH$ . 称  $H$  在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入, 如果对于  $H$  的每个素因子  $p$ ,  $H$  的 Sylow  $p$ -子群也是  $G$  的某个  $\pi$ -拟正规子群的 Sylow  $p$ -子群. 显然,  $\pi$ -拟正规必定是  $\pi$ -拟正规嵌入, 但其逆不一定成立. 例如, 任意群  $G$  的 Sylow 子群一定是  $\pi$ -拟正规嵌入, 但它们不一定是  $\pi$ -拟正规.

本文将继续上述工作. 一方面仍然利用 Sylow 子群的二次极大子群的  $\pi$ -拟正规嵌入性质, 另一方面对群阶的素因子的其它情形进行讨论, 从而得到有限群成为  $p$ -幂零群的两个结果.

## 1 基本引理

**引理 1<sup>[2]</sup>** 设  $H$  是群  $G$  的  $\pi$ -拟正规嵌入子群,

$K$  是  $G$  的子群,  $N$  是  $G$  的正规子群. 则

(1) 若  $H \leq K \leq G$ , 则  $H$  在  $K$  中  $\pi$ -拟正规嵌入;

(2)  $HN$  在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入且  $HN/N$  在  $G/N$  中  $\pi$ -拟正规嵌入;

(3) 若  $N \leq K$  且  $K/N$  在  $G/N$  中  $\pi$ -拟正规嵌入. 则  $K$  在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入.

**引理 2** 设  $N$  是群  $G$  的正规子群,  $P$  是  $G$  的  $p$ -子群, 其中  $p$  是  $|G|$  的一个素因子. 若  $P$  的二次极大子群均在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入, 则  $PN/N$  的二次极大子群皆在  $G/N$  中  $\pi$ -拟正规嵌入.

**证明** 设  $M/N$  是  $PN/N$  的任意二次极大子群. 则存在子群链  $M \leq K \leq PN$  使得  $M$  在  $K$  中极大, 而  $K$  在  $PN$  中极大. 显然,  $K = (P \cap K)N$  且  $P \cap K < P$ . 设  $P_1$  是  $P$  的包含  $P \cap K$  的极大子群, 则  $P_1 \cap N = P \cap N$ . 于是  $K \leq P_1 N < PN$ , 由  $K$  在  $PN$  中的极大性,  $K = P_1 N$ . 同理可证,  $M = P_2 N$ , 其中  $P_2$  是  $P_1$  的极大子群. 最后由引理 1 之 (2),  $M/N = P_2 N/N$  在  $G/N$  中  $\pi$ -拟正规嵌入. 证毕.

**引理 3<sup>[1]</sup>** 设  $H$  在群  $G$  中  $\pi$ -拟正规,  $P$  是  $H$  的一个 Sylow 子群. 若  $H_G = 1$ , 则  $P$  在  $G$  中  $\pi$ -拟正规.

**引理 4<sup>[1]</sup>** 设  $P$  是群  $G$  的一个  $p$ -子群. 若  $P$  在  $G$  中  $\pi$ -拟正规, 则  $N_G(P) \geq O^p(G)$ .

\* 收稿日期: 2004-07-08

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (10271119); 广西自然科学基金资助项目 (0447038); 广西教育厅科研基金资助项目

**作者简介:** 韦华全 (1963年生), 男, 博士, 教授; E-mail: weihuaquan@163.com

**引理 5<sup>[1]</sup>** 设  $G$  是群,  $p$  是  $|G|$  的素因子且  $(|G|, p-1) = 1$ ,  $P$  是  $G$  的 Sylow  $p$ -子群。若  $P$  的极大子群均在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入, 则  $G$  是  $p$ -幂零。

**引理 6<sup>[1]</sup>** 设  $G$  是群,  $p$  是  $|G|$  的一个奇素因子,  $P$  是  $G$  的一个 Sylow  $p$ -子群。若  $N_G(P)$  为  $p$ -幂零且  $P$  的极大子群均在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入, 则  $G$  是  $p$ -幂零。

**引理 7<sup>[3]</sup>** 设  $M$  是群  $G$  的极大子群,  $P$  是  $G$  的正规  $p$ -子群使得  $G = PM$ , 其中  $p$  是  $|G|$  的一个素因子。则  $P \cap M$  是  $G$  的正规子群。

## 2 主要结果

**定理** 设  $H$  是群  $G$  的正规子群使得  $G/H$  是  $p$ -幂零群,  $P$  是  $H$  的 Sylow  $p$ -子群, 其中  $p$  是  $|G|$  的一个素因子。若  $P$  的每个二次极大子群均在  $G$  中  $\pi$ -拟正规嵌入且下列条件之一满足, 则  $G$  是  $p$ -幂零:

(1)  $(|G|, p^2 - 1) = 1$ ;

(2)  $N_G(P)/C_G(P)$  是  $p$ -群。

**证明** 设定理不真,  $G$  为极小阶反例。则

(a)  $O_p(G) = 1$ 。

设  $N = O_p(G) \neq 1$ 。考虑  $\bar{G} = G/N$ 。显然,  $\bar{H} = HN/N \triangleleft \bar{G}$  且  $\bar{G}/\bar{H} \cong G/HN$  为  $p$ -幂零。又,  $\bar{P} = PN/N \in \text{Syl}_p(\bar{H})$ , 由引理 2,  $\bar{P}$  的二次极大子群在  $\bar{G}$  中  $\pi$ -拟正规嵌入。利用 (1) 得  $(|G|, p^2 - 1) = 1$ 。因  $N_G(\bar{P}) = N_G(P)N/N$  及  $C_G(P) \geq C_G(P)N/N$ , 故由 (2) 可知  $N_G(\bar{P})/C_G(\bar{P})$  为  $p$ -群。这就是说  $\bar{G}$  满足定理的条件。  $G$  之极小阶反例推出  $G$  为  $p$ -幂零。这就导致  $G$  亦为  $p$ -幂零, 矛盾。

(b)  $G$  的包含  $P$  的真子群皆  $p$ -幂零。

设  $P \leq M < G$ 。显然,  $M/H \cap M \cong MH/H \leq G/H$  为  $p$ -幂零,  $P$  是  $H \cap M$  的 Sylow  $p$ -子群。由引理 1 之 (1),  $P$  的二次极大子群均在  $M$  中  $\pi$ -拟正规嵌入。利用 (1) 有  $(|M|, p^2 - 1) = 1$ 。利用 (2), 可知

$$\begin{aligned} N_M(P)/C_M(P) &= (M \cap N_G(P))/(M \cap C_G(P)) \\ &\cong (M \cap N_G(P))C_G(P)/C_G(P) \end{aligned}$$

为  $p$ -群。这样  $M$  满足定理的条件, 而  $G$  之极小性蕴含  $M$  是  $p$ -幂零。(b) 得以证明。

(c)  $H = G$ 。

若不然,  $H < G$ 。由 (b),  $H$  为  $p$ -幂零。此时, (a) 蕴含  $H = P$ 。设  $N$  为  $G$  的含于  $P$  的极小正规子群。下证  $\bar{G} = G/N$  满足定理的条件。首先,  $\bar{P} = P/N$  的二次极大子群在  $\bar{G}$  中  $\pi$ -拟正规嵌入,  $G/P \cong \bar{G}/\bar{P}$  为  $p$ -幂零。其次, 对于 (1), 我们有

$(|G|, p^2 - 1) = 1$ ; 对于 (2), 因  $N_G(P) = G$  及  $C_G(P) \geq C_G(P)N/N$ , 故  $N_G(P)/C_G(P)$  是  $p$ -群。由  $G$  之极小性得  $G/N$  为  $p$ -幂零。若  $\bar{P} = P/N$  为  $p$  阶群, 则也易得  $G/N$  为  $p$ -幂零群。然而,  $p$ -幂零群系为饱和群系<sup>[5, VI, P342]</sup>, 所以  $N$  为  $G$  的含于  $P$  的惟一极小正规子群且  $P \cap \Phi(G) = 1$ 。于是, 存在  $G$  的极大子群  $M$  使得  $G = NM$  且  $N \cap M = 1$ 。由引理 7,  $P \cap M \triangleleft G$ , 进一步, 若  $P \cap M \neq 1$ , 则由  $N$  的惟一极小正规性知  $N \leq P \cap M$ , 矛盾。故必有  $P \cap M = 1$ , 进而  $P = N$  及  $P \leq C_G(P)$ 。若  $C_G(P) < G$ , 则由 (b) 知  $C_G(P)$  为  $p$ -幂零。但  $C_G(P) \triangleleft G$ , 故据 (a),  $C_G(P) = P$ 。对于  $M$  的任意 Sylow  $q$ -子群  $Q$ , 其中  $q \neq p$ , 如果  $PQ < G$ , 再利用 (b) 可得  $PQ$  为  $p$ -幂零, 这就导致  $Q \leq C_G(P) = P$ , 矛盾。所以  $G = PQ$ , 即  $M = Q$ 。对于 (2), 我们有  $G = C_G(P)$ , 即  $P \leq Z(G)$ , 此时由  $G/P$  为  $p$ -幂零立即得  $G$  亦为  $p$ -幂零, 矛盾。

以下考虑条件 (1)。首先应用引理 5 得  $|P| > p$ 。取  $P$  的二次极大子群  $P_0$ , 由题设, 存在  $G$  的  $\pi$ -拟正规子群  $K$  使得  $P_0$  是  $K$  的 Sylow  $p$ -子群。若  $P \cap K_c \neq 1$ , 则由  $P$  的极小正规性得  $P \cap K_c = P$ 。此时,  $P$  成为  $K_c$  的 Sylow  $p$ -子群, 这是一个矛盾。故  $P \cap K_c = 1$ 。这就意味着,  $K_c$  为  $G$  的  $p'$ -子群, 由 (a) 即得  $K_c = 1$ 。根据引理 3,  $P_0$  在  $G$  中  $\pi$ -拟正规。于是  $P_0 Q$  成群。从而由  $M = Q$  的极大性推出  $P_0 Q = Q$ 。进一步得  $P_0 = 1$ , 即  $|P| = p^2$ 。此时,  $|\text{Aut}(P)| = (p^2 - p)(p^2 - 1)$ 。但  $G/C_G(P)$  同构于  $\text{Aut}(P)$  的一个子群, 故由  $(|G/C_G(P)|, p^2 - 1) = 1$  得  $G = C_G(P)$ , 即  $P \leq Z(G)$ 。最后由  $G/P$  为  $p$ -幂零推出  $G$  亦为  $p$ -幂零, 矛盾于  $G$  的选择。(c) 成立。

(d)  $O_p(G) = 1$ 。

若否, 设  $N$  为  $G$  的含于  $O_p(G)$  的极小正规子群。类似 (c) 可证  $G/N$  为  $p$ -幂零。由于  $p$ -幂零群系为饱和群, 所以  $N$  是含于  $O_p(G)$  的惟一极小正规子群而且  $O_p(G) \cap \Phi(G) = 1$ 。于是存在  $G$  的极大子群  $M$  使得  $G = NM$  且  $N \cap M = 1$ 。由引理 7,  $O_p(G) \cap M \triangleleft G$ 。若  $O_p(G) \cap M \neq 1$ , 则由  $N$  的惟一性知  $N \leq O_p(G) \cap M$ , 矛盾。故必然有  $O_p(G) \cap M = 1$ , 即  $N = O_p(G)$ 。另一方面, 因为

$$(|P \cap M|, |M : P \cap M|) =$$

$$(|P \cap M|, |G : P|) = 1$$

所以  $P \cap M$  是  $M$  的 Sylow  $p$ -子群。显然,  $P \cap M$

$< P$ 。现设  $P_1$  是  $P$  的包含  $P \cap M$  的极大子群。则

$$P_1 = P_1 \cap N(P \cap M) = (P_1 \cap N)(P \cap M), P_1 \cap M = P \cap M.$$

于是

$$|N : P_1 \cap N| =$$

$|N(P \cap M) : (P_1 \cap N)(P \cap M)| = |P : P_1| = p$   
即  $P_1 \cap N$  是  $N$  的极大子群。若  $P \cap M = 1$ , 则  $P = N$ , 类似 (c) 之证可导出矛盾。下设  $P \cap M \neq 1$  并取  $P \cap M$  的极大子群  $P_2$ 。因  $P_1 \cap N$  在  $P$  中正规,  $P_0 = (P_1 \cap N)P_2$  是  $P$  的二次极大子群。由题设, 存在  $G$  的  $\pi$ -拟正规子群  $K$  使得  $P_0$  是  $K$  的 Sylow  $p$ -子群。若  $K_C \neq 1$ , 考虑  $G_1 = PK_C$ 。若  $G_1 < G$ , 则由 (b) 得  $G_1$  为  $p$ -幂零, 特别地,  $K_C$  为  $p$ -幂零。由此可知  $K_C$  为  $p$ -群, 进一步由  $N$  的惟一性得  $N \leq K_C$ , 导致  $P = N(P \cap M) \leq P_1$ , 矛盾。若  $G_1 = G$ , 则  $G/K_C$  为  $p$ -群, 从而  $G/(N \cap K_C)$  为  $p$ -幂零群。由  $N$  的极小正规性得  $N \cap K_C = N$ , 或者说,  $N \leq K_C$ , 同样可推出矛盾。这样  $K_C = 1$ ,  $P_0$  在  $G$  中  $\pi$ -拟正规。于是对  $M$  的任意 Sylow  $q$ -子群  $M_q$ , 其中  $q \neq p$ , 因为  $M_q$  也是  $G$  的 Sylow  $q$ -子群, 所以  $P_0 M_q = M_q P_0$ 。这样一来,

$$P_0 M = P_0 \langle P \cap M, M_q \mid M_q \in \text{Syl}_q(M),$$

$$\forall q \in \pi(G), q \neq p \rangle$$

是一个群, 即  $(P_1 \cap N)M$  是一个群。但  $(P_1 \cap N)M < G$ , 故  $(P_1 \cap N)M = M$ , 即有  $P_1 \cap N \leq M$ 。进一步地,  $P_1 \cap N = 1$ , 但  $P_1 \cap N$  在  $N$  中极大, 故  $N$  是  $p$  阶循环群。若  $N \leq Z(G)$ , 则由  $G/N$  为  $p$ -幂零立即得  $G$  为  $p$ -幂零, 矛盾。下设  $C_G(N) < G$ 。此时因  $P \leq C_G(N)$ , 利用 (b) 可得  $C_G(N)$  为  $p$ -幂零。于是由 (a),  $P = C_G(N) \triangleleft G$ , 由此可得  $P = N$ 。再次类似 (c) 的证明得到  $G$  为  $p$ -幂零, 矛盾。完成 (d) 的证明。

(e) 反例不存在。

首先证明, 如果  $|P| = p^n$ , 那么  $n \geq 3$ 。事实上, 若  $n \leq 2$  及条件 (2) 成立, 则由  $P$  交换及  $N_G(P)/C_G(P)$  为  $p$ -群立即得  $N_G(P) = C_G(P)$ 。由 Burnside 的正规  $p$ -补定理 (见文[4]或文[5]),  $G$  必是  $p$ -幂零群, 矛盾。下设  $n \geq 2$  及 (1) 成立。

由引理 5,  $n \neq 1$ , 故  $n = 2$ 。因  $N_G(P)/C_G(P)$  同构于  $\text{Aut}(P)$  的一个子群, 而  $|\text{Aut}(P)| = (p^2 - p)(p^2 - 1)$ , 故由  $P$  交换及条件 (1) 可得  $N_G(P) = C_G(P)$ , 同样导致矛盾。所以  $n \geq 3$ 。这就是说,  $P$  的任意二次极大子群  $P_0 \neq 1$ 。由题设, 存在  $G$  的  $\pi$ -拟正规子群  $K$  使得  $P_0$  是  $K$  的 Sylow  $p$ -子群。若  $K_C \neq 1$ , 则由 (a) 至 (c) 易知  $G = PK_C$ 。显然,  $1 < P \cap K_C < P$  且  $P \cap K_C$  是  $K_C$  的 Sylow  $p$ -子群。取  $P$  的极大子群  $P_1$  使得  $P \cap K_C \leq P_1$ 。则  $P_1$  是  $G_1 = P_1 K_C$  的 Sylow  $p$ -子群。由题设,  $P_1$  的极大子群在  $G$  中从而在  $G_1$  中  $\pi$ -拟正规嵌入。如果  $p = 2$  或条件 (1) 成立, 由引理 5 得  $G_1$  为  $p$ -幂零, 当然  $K_C$  为  $p$ -幂零, 从而由 (a) 和 (d) 得  $K_C = 1$ , 矛盾。如果  $p > 2$  及 (2) 成立, 因  $P \leq N_G(P_1) < G$ , 故由 (b) 知  $N_G(P_1)$  为  $p$ -幂零, 从而  $N_{G_1}(P_1)$  亦为  $p$ -幂零。利用引理 6,  $G_1$  为  $p$ -幂零; 特别地,  $K_C$  为  $p$ -幂零, 也是矛盾。所以  $K_C = 1$ 。由引理 3,  $P_0$  在  $G$  中  $\pi$ -拟正规。此时由引理 4 及 (d),  $O^p(G) \leq N_G(P_0) < G$ , 从而由  $G = PO^p(G)$  及 (a) 可得  $1 < P \cap O^p(G) < P$ 。类似上述证明同样可导出矛盾, 完成证明。

注 定理的条件  $(|G|, p^2 - 1) = 1$  或  $N_G(P)/C_G(P)$  为  $p$ -群不能去掉。如 4 次交错群  $A_4$  不是 2-幂零的, 虽然它的 Sylow 2-子群的二次极大子群为 1。

致谢: 感谢导师王燕鸣教授的指导!

#### 参考文献:

- [1] LI Y M, WANG Y M, WEI H Q. On  $p$ -nilpotency of finite groups with some subgroups  $\pi$ -quasinormally embedded[J]. Acta Math Hungar, 2005, 108(4): 1 - 17.
- [2] BALLESTER-BOLINCHES A, PEÑÁRAZA M C. Sufficient conditions for supersolubility of finite groups[J]. J Pure and Applied Algebra, 1998, 127: 113 - 118.
- [3] WANG Y M, WEI H Q, LI Y M. A generalisation of Kramer's theorem and its applications[J]. Bull Austral Math Soc, 2002, 65: 467 - 475.
- [4] ROBINSON J S. A course in the theory of groups[M]. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [5] HUPPERT B. Endliche Gruppen I[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1983.

(下转第 12 页)

- Mathematical Analysis and Applications, 1990, 147: 420 - 448.
- [2] LI J M, CAI S L. Global analyses of a class of cubic systems [J]. Acta Math Sinica, 1997, 13: 207 - 220.
- [3] 杨殿武. 具有星形结点的一类平面四次系统的全局结构(I)[J]. 数学物理学报, 1996, 16(3): 263 - 268.
- [4] 姚卫红, 尚德生, 余敏杰. 具有星形结点的平面五次系统的全局分析[J]. 数学物理学报, 2003, 23A(2): 193 - 207.
- [5] 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性方程组与定理机器证明[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1996.
- [6] 王东明. 消去法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [7] 梁肇军. 多项式微分系统全局分析导引[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1989.
- [8] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 常微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

## General Algebraic Classification Method for a Class of Polynomial Systems

SANG Bo, ZHU Si-ming

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** By complete discrimination system of polynomial algebraic equation and resultant theory, a symmetry class of quartic systems with stellar node is studied. An algebraic classification of the systems is given, and the global phase portraits of systems are studied. It is worth pointing out that this method can be applied to a kind of polynomial systems with stellar nodes.

**Key words:** singular point; stellar node; polynomial differential systems; phase portrait

(上接第3页)

## On $\pi$ -Quasinormally Embedded Subgroups and the $p$ -Nilpotency of Finite Groups

WEI Hua-quan<sup>1,2</sup>, LU Ruo-fei<sup>3</sup>, LIU Xiao-lei<sup>4</sup>

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Guangxi Teacher's College, Nanning 530001, China;

3. Department of Mathematics, Guangxi Institute for the Nationalities, Nanning 530006, China;

4. Department of Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, China)

**Abstract:** By investigating some special prime divisors of the order of groups and using the  $\pi$ -quasinormally embedding of second maximal subgroups of Sylow subgroups, it is obtained: let  $H$  be a normal subgroup of finite group  $G$  such that  $G/H$  is a  $p$ -nilpotent group and let  $P$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $H$ , where  $p$  is a prime divisor of  $|G|$ . If every 2-maximal subgroup of  $P$  is  $\pi$ -quasinormally embedded in  $G$  and one of the following conditions holds, then  $G$  is a  $p$ -nilpotent group: (1)  $(|G|, p^2 - 1) = 1$ ; (2)  $N_G(P)/C_G(P)$  is a  $p$ -group.

**Key words:** finite group;  $p$ -nilpotent;  $\pi$ -quasinormally embedded