

奇异协方差阵下前沿组合及无套利分析*

蒋春福, 戴永隆

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究了奇异协方差阵的投资组合选择模型, 运用镶边矩阵广义逆方法得到了存在前沿组合的充要条件, 并给出了前沿组合的显式解和组合前沿的性质。最后, 在奇异协方差阵下进行了无套利分析, 得到了市场无套利的充要条件, 证明了 Szegö 的猜想。

关键词: 奇异协方差阵; 证券组合; 组合前沿; 无套利分析

中图分类号: F830.9; O212.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 05-0014-04

1 研究背景

Markowitz 提出的证券组合选择的 M-V 模型是现代投资组合理论的基础, 也是现代金融经济学的基石。目前的文献主要集中在有效证券组合和有效边界的确定^[1-4], 最近 Bick^[5]又从解析几何的角度研究了证券组合有效边界的性质, 但他们都是在假定协方差阵为满秩的条件下进行的。这种假定对由传统金融资产构成的资产组合在一定程度上可以接受, 但是, 一方面, 随着各种资产种类的增加, 特别是近几年来中国金融衍生产品的大量涌现, 许多机构投资者必然会考虑包含衍生工具的投资组合问题, 这时很可能导致金融资产出现完全相关性, 从而会出现协方差阵奇异的情况; 另一方面, 在实际的组合投资决策中, 投资者往往通过投资不同风险资产来分散组合风险, 这样随着资产数量的增加, 相关资产的种类也就必然会增多, 这也会导致协方差阵不是满秩的情况出现。因此, 协方差阵奇异条件下的投资决策问题才是最为普遍的, 对于协方差阵奇异时的投资决策问题的研究, 迄今为止这方面的文献不多^[6]。

最近, 史树中和杨杰^[7]指出当协方差阵奇异时证券市场要么存在套利, 要么存在有效子集, 熊和平^[8]从理论上进一步证实了此时要么可以构造套利组合, 要么可以通过去除冗余的证券来求解有效证券组合, 本文进一步深入探讨这一问题。

设证券市场存在 n 种风险证券和一种无风险证券, 无风险资产的收益率用 r_f 表示, 而 n 种风险资产的收益率用向量 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ 表示,

其中 r_i 表示第 i 种风险资产的收益率, 为随机变量, 它们期望(即期望收益)为 $\mu = E(r)$, 协方差阵为 $V = \text{Var}(r)$, 并且 $V \geq 0$, 即 $R(V) \leq n$, 这也就是说 V 不必是满秩的。

设投资者在 n 种风险资产的投资比例分别为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 投资在无风险资产上的比例为 ω_{n+1} 。对于一个证券组合 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)'$, 称 $r_\omega = \omega' r$ 为组合证券的收益率, $\bar{r}_\omega = \omega' \mu$ 为组合证券的期望收益率, $\sigma_\omega^2 = \omega' V \omega$ 为组合证券的风险。

仅存在风险资产证券时的 M-V 模型可描述为

$$\begin{aligned} \text{Min } \sigma_\omega^2 &= \omega' V \omega, \\ \text{s.t. } L\omega &= l \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $L = (e, \mu)'$, $l = (1, r_p)'$, $e = (1, 1, \dots, 1)'$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)'$ 。

存在无风险证券时的 M-V 模型可描述为

$$\begin{aligned} \text{Min } \sigma_\omega^2 &= \omega' V \omega, \\ \text{s.t. } \eta' \omega &= r_p - r_f \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)'$, $\omega_{n+1} = 1 - e' \omega$, $e = (1, 1, \dots, 1)'$, $\eta = \mu - e r_f$ 为超额收益率向量。

一些记号: 设 A 为一矩阵, 记 A' 表示矩阵 A 的转置, A^- 表示 A 的广义逆, A^+ 表示 A 的 Moore-Penrose 广义逆, $N_A = I - A^+ A$, $P_A = A(A'A)^+ A'$ 表示 A 的正交投影阵, $\mathcal{M}(A)$ 表示由矩阵 A 的列向量生成的线性空间, $R(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

2 前沿组合的通解

定义 1 设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)'$ 为一个证券

* 收稿日期: 2004-09-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271120)

作者简介: 蒋春福 (1977 年生), 男, 博士研究生; 通讯联系人: 戴永隆; E-mail: jcfllx@163.com

组合, r_p 为一给定的常数, 如果 ω 满足 $L\omega = l$, 则称 ω 为一个可行组合。其中, $l = (1, r_p)'$ 。

定义 2 设 $\omega \in \mathbf{R}^n$ 为一个可行组合, 如果 ω 使得组合风险 $\sigma_\omega^2 = \omega'V\omega$ 达到最小, 则称 ω 为一个前沿组合。

模型(1)为一个凸规划问题, 为了求模型(1)的最优解, 需要构造拉格朗日函数

$$L(\omega, \lambda) = \frac{1}{2} \omega'V\omega + \lambda'(L\omega - l)$$

其中, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)'$ 。令 $\frac{\partial L}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, 可得如下矩阵方程

$$\begin{pmatrix} V & L' \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} \quad (3)$$

显然, 方程(3)有解为模型(1)存在最优解的充要条件, 以下简记

$$A = \begin{pmatrix} V & L' \\ L & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \omega \\ \lambda \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}$$

引理 1 若 $\mathcal{M}(L') \subset \mathcal{M}(T)$, $T \geq 0$, $Q = LT^{-1}L'$, 则有

$$(1) TT^{-1}L' = L', LT^{-1}T = L;$$

(2) $Q = LT^{-1}L'$ 与 T^{-1} 的选取无关, 且 $\mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(Q)$;

(3) Q 的 Moore-Penrose 广义逆 $Q^+ = L'^+TL^+ - L'^+TN_L(N_LTN_L)^+N_LTL^+$ 。

定理 1 对于 M-V 模型(1), 有如下结论

(1) 市场存在前沿组合当且仅当 $l \in \mathcal{M}(L)$;

(2) 对于某个给定投资目标 r_p , 若市场存在前沿组合, 则其通解为

$$\omega = T^+L'Q^+l + N_T\zeta$$

其中, ζ 为任意的 n 维向量, $T = V + L'L$, $Q = LT^{-1}L'$, $l = (1, r_p)'$ 。

证明 (1) 由前面的分析可知, 存在前沿组合的充要条件为矩阵方程(3)有解, 而方程(3)有解当且仅当存在广义逆矩阵 A^- 使得 $AA^-x = b$ 。由镶边矩阵的广义逆^[9]知

$$A^- = \begin{pmatrix} V & L' \\ L & 0 \end{pmatrix}^- =$$

$$\begin{pmatrix} T^- - T^-L'Q^-LT^- & T^-L'Q^- \\ Q^-LT^- & Q^-Q - Q^- \end{pmatrix}$$

其中, $T = V + L'L$, $Q = LT^{-1}L'$ 。所以,

$$AA^-b = \begin{pmatrix} VT^-L'Q^- + L'Q^-Q - L'Q^- \\ LT^-L'Q^- \end{pmatrix} l = \begin{pmatrix} L'Q^-Ql - L'QQ^-l \\ QQ^-l \end{pmatrix} \quad (4)$$

又因为 $T = V + L'L$ 为非负定矩阵, 显然 $\mathcal{M}(L') \subset \mathcal{M}(T)$, 从而由引理 1 (2) 知 $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(L)$ 。因此, 一方面, 若 $l \in \mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(Q)$, 则有 $L'Q^-Ql - L'QQ^-l = 0$, $QQ^-l = l$, 由(4)式知矩阵方程(3)相容。另一方面, 若矩阵方程(3)相容, 则对任一广义逆 A^- , $x = A^-b$ 必为其解, 由(4)式知存在广义逆矩阵 Q^- 使得 $L'Q^-Ql - L'QQ^-l = 0$, $QQ^-l = l$, 从而有 $l \in \mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(L)$ 。

(2) 方程 (3) 的通解为

$$x = A^+b + N_AU \quad (5)$$

其中, $U = (\zeta', \gamma')'$ 为任意 $n+2$ 维列向量, ζ 为任意 n 维列向量, γ 为任意 2 维列向量, 由镶边矩阵的广义逆知

$$A^+ = \begin{pmatrix} V & L' \\ L & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} T^+ - T^+L'Q^+LT^+ & T^+L'Q^+ \\ Q^+LT^+ & Q^+Q - Q^+ \end{pmatrix} \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式, 并由事实 $L'Q^+Q = L'$, $LT^+T = L$ 可得

$$x = \begin{pmatrix} \omega \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^+L'Q^+l + N_T\zeta \\ (Q^+Q - Q^+)l + N_Q\gamma \end{pmatrix} \quad (7)$$

由(7)式可知, 前沿组合的通解为 $\omega = T^+L'Q^+l + N_T\zeta$ 。定理证毕。

值得一提的是, 定理 1 还蕴涵一个有趣的事实, 那就是证券组合的组合前沿与前沿组合的唯一性无关, 而且任意两个前沿组合的协方差也与证券组合的唯一性无关, 写成定理的形式如下。

定理 2 对于 M-V 模型 (1), 可令 $H = L'^+VL^+ - L'^+VN_L(N_LVN_L)^+N_LVL^+$, 则有结论

(1) 任给投资目标 r_p , 设其前沿组合为 ω , 则 $\sigma_\omega^2 = \text{Var}(\omega'r) = l'Hl$, 其中 $l = (1, r_p)'$ 。

(2) 任给投资目标 r_p 和 r_q , 设其前沿组合分别为 ω_p 和 ω_q , 则 $\text{Cov}(\omega_p'r, \omega_q'r) = l_p'Hl_q$, 其中 $l_p = (1, r_p)'$, $l_q = (1, r_q)'$ 。

证明 (1) 由引理 1 之 (2) 知 $\mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(Q)$, 所以 $l'N_Q = 0$, $l'Q^+Q = l'$, 所以, 组合 ω 的风险为

$$\sigma_\omega^2 = \omega'V\omega = -\omega'L'\lambda = -l'\lambda = l'(Q^+ - Q^+Q)l \quad (8)$$

由引理 1 之 (3), 将 Q^+ 代入 (8) 式, 并注意到 $l \in \mathcal{M}(L)$, 所以 $LL^+l = l$, 计算可得

$$\sigma_\omega^2 = l'(L'^+TL^+ - L'^+TN_L(N_LTN_L)^+N_LTL^+ - LL^+)l = l'(L'^+(V + LL)L^+ - L'^+VN_L(N_LVN_L)^+N_LVL^+ - LL^+)l = l'L'^+VL^+l - l'L'^+VN_L(N_LVN_L)^+N_LVL^+l \quad (9)$$

(2) 由定理1之(2)可知 $\omega_p = T^* L' Q^* l_p + N_T \zeta_1$, $\omega_q = T^* L' Q^* l_q + N_T \zeta_2$, 其中 ζ_1, ζ_2 为任意 n 维向量。将 ω_p, ω_q 代入即得, 详细证明过程与结论(1)类似。

定理3 对于存在无风险证券时的 M-V 模型(2), 设 r_p 为某个给定的投资目标, 若 $\mu \neq er_f$, 则

(1) 前沿组合的通解为

$$\omega = \frac{r_p - r_f}{\eta' T^* \eta} T^* \eta + N_T \zeta, \omega_{n+1} = 1 - e' \omega \quad (10)$$

其中, ζ 为任意 n 维向量, $T = V + \eta \eta', \eta = \mu - er_f$

(2) 前沿组合的风险为

$$\sigma_\omega^2 = h(r_p - r_f)^2 \quad (11)$$

其中, $h = \eta^* V \eta^{*+} - \eta^* V N_T (N_T^* V N_T)^+ N_T^* V \eta^{*+}$, $\eta = \mu - er_f$ 。

证明 M-V 模型(2)的前沿组合为矩阵方程

$$\begin{pmatrix} V & \eta \\ \eta' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_p - r_f \end{pmatrix} \quad (12)$$

的解。其中, $\eta = \mu - er_f$ 。因此, 对于 M-V 模型(2)直接应用定理1可得定理成立。

由(11)式知, 当存在无风险资产时, 组合前沿仍为一条射线。这与 $V > 0$ 时的情形是一致的。

3 无套利分析

引理2^[9] 设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 为一 n 维向量, 则 α 的 Moor-Penrose 广义逆为 $\alpha^+ = \frac{\alpha'}{\|\alpha\|^2}$ 。

定理4 若不存在常数 c 使得 $\mu = ce$, 则市场不存在套利组合当且仅当 $\eta \in \mathcal{M}(V)$ 。其中, $\eta = \mu - er_f$ 为超额收益率向量。

证明 充分性。因为 $q = \eta' T^* \eta, T = V + \eta \eta'$, 所以 $\eta \in \mathcal{M}(T)$, 由引理1之(2)知 q 与 T^- 的选择无关, 特别地, 可以选取满秩的 T^- , 又 $R(\eta) = 1$, 所以 $q > 0$ 。由(7)式知矩阵方程(12)中拉格朗日乘子 $\lambda = (1 - q^{-1})(r_p - r_f)$, 由引理1及引理2知,

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \eta^* T \eta^{*+} - \eta^* T N_T (N_T^* T N_T)^+ N_T^* T \eta^{*+} = \\ &= \eta^* V \eta^{*+} - \eta^* V N_T (N_T^* V N_T)^+ N_T^* V \eta^{*+} + \\ &= \eta^* \eta = h + 1 \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $h = \eta^* V \eta^{*+} - \eta^* V N_T (N_T^* V N_T)^+ N_T^* V \eta^{*+}$ 。若 $\eta \in \mathcal{M}(V)$, 则类似 $q > 0$ 情形的证明, 可得 $\eta^* V \eta^{*+} > 0$, 从而由引理1之(3)知, $h = (\eta^* V \eta^{*+})^{-1} > 0$ 。因此, 只要 $r_p \neq r_f$, 必有 $\lambda = (1 - q^{-1})(r_p - r_f) \neq 0$, 设 $r_p \neq r_f$ 为任意一个投资目标, 则由定理2知, 存在前沿组合 ω 使得(12)

式成立, 现在任给一个证券组合 ω^* , 若 ω^* 满足 $V\omega^* = 0, e'\omega^* = 0$, 则用 $(\omega^*, 0)$ 同时左乘(12)式两边, 可得 $\lambda \omega^* \mu = 0$, 因为 $\lambda \neq 0$, 从而必有 $\omega^* \mu = 0$; 若 ω^* 满足 $V\omega^* = 0, e'\omega^* = 1$, 类似地, 可以证明 $\omega^* \mu = r_f$, 从而由无套利假设知 ω 是无套利的。

必要性用反证法。假设市场不存在套利组合, 但 $\eta \in \mathcal{M}(V)$ 不成立, 也就是说 η 和 V 的列向量是线性无关的, 将 V 和 η 线性无关的向量扩张成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 设为 $D = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 设 $R(V) = r$, 且不妨假设 V 只能由 D 的前 r 个向量线性表示, 而 η 只能由后 $n - r$ 个向量线性表示。因为 $V \geq 0$, 故存在矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得 $V = CC'$ 。又 $\mathcal{M}(CC') = \mathcal{M}(C)$, 所以 C 也只能由 D 的前 r 个向量线性表示。即存在 $Z_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}, z \in \mathbb{R}^{n-r}$ 使得

$$C = D_1 Z_1 = D \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta = D_2 z = D \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$$

这里, $D = (D_1, D_2), D_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r), D_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n)$

从而

$$T = CC' + \eta \eta' = D \begin{pmatrix} Z_1 Z_1' & 0 \\ 0 & zz' \end{pmatrix} D'$$

所以

$$q = \eta' T^* \eta = (0 \quad z') \begin{pmatrix} Z_1 Z_1' & 0 \\ 0 & zz' \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} = P_z$$

其中, $P_z = z'(zz')^+ z$ 。因此, 由引理2并注意到 $z'^+ = (zz')^+ z$, 所以易得 $q = 1$ 。由(13)式知 $h = 0$, 从而对任一前沿组合 ω , 其组合风险 $\sigma_\omega^2 = h(r_p - r_f)^2 = 0$ 。此时对任意大于无风险收益率的投资目标 r_p , 得到的前沿组合

$$\omega = \frac{r_p - r_f}{\eta' T^* \eta} T^* \eta + N_T \zeta, \omega_{n+1} = 1 - e' \omega \quad (14)$$

即为套利组合, 其中 ζ 为任意 n 维向量, 这与假设市场无套利矛盾, 定理证毕。

人们已经知道, 当 $V > 0$ 时, 均衡市场是不存在套利组合的, 但是当协方差阵奇异时的情形会怎么样呢?

Szegö^[1]曾猜想当协方差阵的秩小于 $n - 1$ 时证券市场有可能存在套利组合。定理4实质是从理论上证明了他的猜想是正确的, 而且当协方差阵奇异时, 它可以作为均衡市场是否存在套利组合的一个简单的判定法则。在投资实践中, 只需比较 $R(V)$ 和 $R(V, \eta)$ 即可, 若两者相等, 则市场不存在套利组合, 否则就存在套利组合, 并且由方程(14)可构造出这些套利组合。

参考文献：

- [1] SZEGÖ G P. Portfolio theory: with application to bank asset management[M]. New York: Academic, 1980.
- [2] MARKOWITZ H M. Foundations of portfolio theory[J]. Journal of Finance, 1991, 46: 469 – 477.
- [3] STEINBACH M C. Markowitz revisited: mean-variance models in financial portfolio analysis[J]. Siam Review, 2001, 43: 31 – 85.
- [4] FELDMAN D, REISMAN H. Simple construction of the efficient frontier[J]. European Financial Management, 2003, 9: 251 – 259.
- [5] BICK A. The mathematics of the portfolio frontier: a geometry-based approach[J]. The Quarterly Review of Economics and Finance, 2004, 44: 337 – 361.
- [6] VÖRÖS J. The explicit derivation of the efficient portfolio frontier in the case of degeneracy and general singularity[J]. European Journal of Operational Research, 1987, 32: 302 – 310.
- [7] 史树中, 杨杰. 证券组合选择的有效子集[J]. 应用数学学报, 2002, 25: 176 – 186.
- [8] 熊和平. 投资组合协方差矩阵的性质与最优组合的选择[J]. 中国管理科学, 2002, 10: 12 – 14.
- [9] 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1996.

Frontier Portfolio and No-arbitrage Analysis with Singular Covariance Matrix

JIANG Chun-fu, DAI Yong-long

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Portfolio choice model with singular covariance matrix is investigated. Not only the necessary and sufficient conditions for existing frontier portfolio in the capital market are obtained, but also the implicit general solutions of frontier portfolio and some properties of portfolio frontier are derived through the generalized inverse of bordered matrix. Finally, no-arbitrage analysis of the financial market with singular covariance matrix are made, and the necessary and sufficient condition for not existing arbitrage portfolio is obtained, which proves the conjecture proposed by Szegő.

Key words: singular covariance matrix; portfolio; portfolio frontier; no-arbitrage analysis