

二阶非线性中立型微分方程的 Stum 比较定理^{*}

庄容坤, 朱思铭, 王其如
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘要: 通过建立几个微分不等式, 讨论了一类二阶非线性中立型微分方程的振动性, 将经典的 Stum 比较定理推广到中立型微分方程, 得到几个新的 Stum 型比较定理.

关键词: 中立型微分方程; 微分不等式; 振动性; Stum 比较定理

中图分类号: O175.12; O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 01-0005-05

1 问题的提出

考虑二阶线性常微分方程

$$[p_1(t)x'(t)]' + q_1(t)x(t) = 0 \quad (1)$$

及二阶非线性中立型微分方程

$$[p_2(t)(y(t) + \lambda(t)y(t-\tau))]' + q_2(t)|y(t-\sigma_1)|^\alpha \operatorname{sgn} y(t-\sigma_1) + r(t)|y(t-\sigma_2)|^\beta \operatorname{sgn} y(t-\sigma_2) = 0 \quad (2)$$

其中 $t \geq t_0$, 且满足下面条件:

- (1) 函数 $p_1, p_2: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 连续可微且满足 $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{p_2(t)} dt = \infty$
- (2) 函数 $q_1, q_2, r: [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是连续的;
- (3) 函数 $\lambda: [t_0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ 是连续的;
- (4) $\tau > 0, \sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \alpha \in [0, 1], \beta > 1$.

以下总假设方程 (2) 的解 $y(t)$ 可延拓到整个右半轴且不最终恒为 0, 即 $y(t)$ 在某个 $[T_y, \infty)$ 上定义且对每一个 $T \geq T_y$ 满足 $\sup_{t \geq T} \{|y(t)|\} > 0$. 方程 (1) 的这样一个解 $y(t)$ 称为非平凡解. 一个非平凡解 $y(t)$ 称为振动的, 如果 $y(t)$ 有任意大零点, 否则称它是非振动的. 方程 (2) 称为振动的, 如果它的任何非平凡解都是振动的; 方程 (2) 称为非振动的, 如果它的任何非平凡解都是非振动的.

关于非线性中立型时滞微分方程的振动理论, 近几年已被很多学者所研究^[1-3]. 在线性方程的振动理论中, 一个强有力的研究方法是利用 Picone 提供的恒等式^[4]. 最近, 文献[5, 6]将 Picone 恒等式推广到非线性常微分方程, 并将 Picone 恒等式推广到非线性中立型时滞微分方程, 并用于研究中立型微分方程的振动性, 目前尚未见报道. 本文通过建立若干微分不等式, 把 Picone 恒等式推广到非线性中立型微分方程, 并将其应用于研究中立型微分方程的振动性, 得到了关于中立型微分方程振动的比较定理.

2 主要结论

引理 1^[7] 设 $x, y > 0, m, n > 1$ 且 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ 则有

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} \geq x^{1/m} y^{1/n} \quad (3)$$

引理 2 若 $y(t)$ 是方程 (2) 的非振动解, 定义

$$Z(t) = y(t) + \lambda(t)y(t-\tau) \quad (4)$$

* 收稿日期: 2004-01-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371135); 广东省教育厅自然科学基金资助项目

作者简介: 庄容坤 (1964年生), 男, 副教授; 通讯联系人: 朱思铭; E-mail: stszsm@zsu.edu.cn

则 $Z(t)Z'(t)$ 最终为正.

证明 不失一般性, 设 $y(t-\tau) > 0$, $y(t-\sigma_1) > 0$, $y(t-\sigma_2) > 0$, $t \geq T_1 \geq t_0$, 则 $Z(t) > 0$ 且

$$[p_2(t)Z']' = -q_2(t)|y(t-\sigma_1)|^\alpha \operatorname{sgn} y(t-\sigma_1) - r(t)|y(t-\sigma_2)|^\beta \operatorname{sgn} y(t-\sigma_2) \leq 0, t \geq T_1 \quad (5)$$

从而, $p_2(t)Z'(t)$ 是递减的, 于是可得 $p_2(t)Z'(t) > 0$, $t \geq T_1 \geq t_0$. 事实上, 若 $p_2(t)Z'(t) \leq 0$, $t \geq T_1 \geq t_0$, 则存在一个 $T_2 > T_1$ 使得 $p_2(T_2)Z'(T_2) < 0$ 且

$$Z(t) - Z(T_2) \leq p_2(T_2)Z(T_2) \int_{T_2}^t \frac{ds}{p_2(s)}, t > T_2$$

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = -\infty$, 这与 $Z(t) > 0$ 矛盾, 从而引理得证.

引理 3 设 $y(t)$ 是方程 (2) 的非振动解. 令

$$w(t) = \frac{p_2(t)Z'(t)}{Z(t-\sigma_1)} \quad (6)$$

则下面不等式最终成立

$$w'(t) \leq -\theta w(t) - \frac{w^2}{p_2(t-\sigma_1)} \quad (7)$$

其中 $Z(t)$ 如 (4) 式所定义, $\theta = \min\left\{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}, \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right\}$, 且

$$S(t) = q_2(t)^{\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}} r(t)^{\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}} [1-\lambda(t-\sigma_1)]^{\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta-\alpha}} [1-\lambda(t-\sigma_2)]^{\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta-\alpha}}$$

证明 不失一般性, 设 $y(t) > 0$, $y(t-\tau) > 0$, $y(t-\sigma_1) > 0$, $y(t-\sigma_2) > 0$, $t \geq T \geq t_0$. 若 $y(t)$ 最终为负, 可类似证明, 此处省略. 则 $Z(t) > 0$, $t \geq T_1 \geq t_0$. 于是方程 (2) 变为

$$[p_2(t)Z'(t)]' + q_2(t)y^\alpha(t-\sigma_1) + r(t)y^\beta(t-\sigma_2) = 0 \quad (8)$$

由引理 2, 有 $y(t-\tau) \leq Z(t-\tau) \leq Z(t)$, 从而 $Z(t) \leq y(t) + \lambda(t)Z(t)$, 由 $\lambda(t) \leq 1$, 可得

$$y(t) \geq [1-\lambda(t)]Z(t) \quad (9)$$

为方便起见, 假设 $\sigma_1 \geq \sigma_2$ (若 $\sigma_1 < \sigma_2$, 可类似证明). 令 $w(t) = \frac{p_2(t)Z'(t)}{Z(t-\sigma_1)}$, 则 $w(t) \geq 0$,

$[p_2(t)Z'(t)]' \leq 0$. 考虑条件 (4), 得 $p_2(t)Z'(t) \leq p_2(t-\sigma_1)Z'(t-\sigma_1)$

由式 (8) 及引理 2, 得

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{[p_2(t)Z'(t)]' Z(t-\sigma_1) - p_2(t)Z'(t)Z'(t-\sigma_1)}{Z^2(t-\sigma_1)} \leq \\ &= \frac{[p_2(t)Z'(t)]'}{Z(t-\sigma_1)} - \frac{p_2(t)Z'(t)p_2(t-\sigma_1)Z'(t-\sigma_1)}{p_2(t-\sigma_1)Z^2(t-\sigma_1)} - \frac{[p_2(t)Z'(t)]'}{Z(t-\sigma_1)} - \frac{[p_2(t)Z'(t)]^2}{p_2(t-\sigma_1)Z^2(t-\sigma_1)} = \\ &= -\frac{q_2(t)y^\alpha(t-\sigma_1) + r(t)y^\beta(t-\sigma_2)}{Z(t-\sigma_1)} - \frac{w^2}{p_2(t-\sigma_1)} \end{aligned}$$

由不等式 (9) 得

$$w'(t) \leq -\frac{q_2(t)[1-\lambda(t-\sigma_1)]^\alpha Z^{\alpha-1}(t-\sigma_1)}{Z(t-\sigma_1)} - \frac{r(t)[1-\lambda(t-\sigma_2)]^\beta Z^{\beta-1}(t-\sigma_2)}{Z(t-\sigma_1)} - \frac{w^2}{p_2(t-\sigma_1)}$$

由引理 2 知 $Z'(t) \geq 0$, 再由 $\sigma_1 \geq \sigma_2$ 和 $t-\sigma_1 \leq t-\sigma_2$ 得 $Z(t-\sigma_1) \leq Z(t-\sigma_2)$, 于是有

$$w'(t) \leq -q_2(t)[1-\lambda(t-\sigma_1)]^\alpha Z^{\alpha-1}(t-\sigma_1) - r(t)[1-\lambda(t-\sigma_2)]^\beta Z^{\beta-1}(t-\sigma_2) - \frac{w^2}{p_2(t-\sigma_1)} \quad (10)$$

由引理 1 得

$$\begin{aligned} &\frac{q_2(t)[1-\lambda(t-\sigma_1)]^\alpha Z^{\alpha-1}(t-\sigma_1)}{(\beta-\alpha)/(\beta-1)} + \frac{r(t)[1-\lambda(t-\sigma_2)]^\beta Z^{\beta-1}(t-\sigma_2)}{(\beta-\alpha)/(1-\alpha)} \geq \\ &= q_2(t)^{\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}} [1-\lambda(t-\sigma_1)]^{\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta-\alpha}} r(t)^{\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}} [1-\lambda(t-\sigma_2)]^{\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta-\alpha}} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &q_2(t)[1-\lambda(t-\sigma_1)]^\alpha Z^{\alpha-1}(t-\sigma_1) + r(t)[1-\lambda(t-\sigma_2)]^\beta Z^{\beta-1}(t-\sigma_2) \geq \\ &= \theta q_2(t)^{\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}} r(t)^{\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}} [1-\lambda(t-\sigma_1)]^{\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta-\alpha}} [1-\lambda(t-\sigma_2)]^{\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta-\alpha}} \end{aligned} \quad (11)$$

再由 (10) 和 (11) 式, 得

$$w'(t) \leq -\theta S(t) - \frac{w^2}{p_2(t-\sigma_1)}$$

引理 4 设 $x(t), y(t)$ 分别为方程 (1) 和方程 (2) 的非平凡解。如果 $y(t)$ 是非振动的, 则下面不等式最终成立

$$\left[\frac{x}{Z(t-\sigma_1)} (p_1 x' Z(t-\sigma_1) - x p_2 Z') \right]' \geq \left[\frac{p_2 x Z'}{\sqrt{p_2(t-\sigma_1)} Z(t-\sigma_1)} - x' \sqrt{p_2(t-\sigma_1)} \right]^2 + [p_1 - p_2(t-\sigma_1)] x'^2 + [\theta S(t) - q_1] x^2 \quad (12)$$

其中 $Z(t)$ 如 (4) 式所定义, θ 和 $S(t)$ 如引理 3 所给。

证明 不失一般性, 设方程 (2) 有非平凡解 $y(t)$ 满足 $y(t) > 0, y(t-\tau) > 0, y(t-\sigma_1) > 0, y(t-\sigma_2) > 0, t \geq T \geq t_0$ 。(若 $y(t)$ 最终为负可类似证明, 此处省略)。则 $Z(t) > 0$ 。由引理 3, 存在一个充分大的 $T_1 \geq t_0$ 使 (7) 式成立。

直接对 (12) 式的左边求导并利用 (1) 式和 (7) 式, 则当 $t \in [T_1, \infty]$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x}{Z(t-\sigma_1)} (p_1 x' Z(t-\sigma_1) - x p_2 Z') \right]' &= p_1 x'^2 + (p_1 x')' x - 2x x' w(t) - x^2 w'(t) \geq \\ &= p_1 x'^2 - q_1 x^2 - 2x x' w(t) + \theta S(t) x^2 + x^2 \frac{w^2}{p_2(t-\sigma_1)} = \\ &= \left[\frac{xw}{\sqrt{p_2(t-\sigma_1)}} - x' \sqrt{p_2(t-\sigma_1)} \right]^2 + [p_1 - p_2(t-\sigma_1)] x^2 + [\theta S(t) - q_1] x^2 = \\ &= \left[\frac{p_2 x Z'}{\sqrt{p_2(t-\sigma_1)} Z(t-\sigma_1)} - x' \sqrt{p_2(t-\sigma_1)} \right]^2 + [p_1 - p_2(t-\sigma_1)] x^2 + [\theta S(t) - q_1] x^2 \end{aligned}$$

引理 5 设 $x(t), y(t)$ 分别为方程 (1) 和方程 (2) 的非平凡解。如果 $y(t)$ 是非振动的, $p \in C^1([t_0, \infty), \mathbf{R}_+)$, 则下面不等式最终成立

$$\begin{aligned} \left[\left(p x' - \frac{x p_2 Z'}{Z(t-\sigma_1)} \right) x - \frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1') x^2 \right]' &\geq \left[\frac{p_2 x Z'}{\sqrt{p_2(t-\sigma_1)} Z(t-\sigma_1)} - x' \sqrt{p_2(t-\sigma_1)} \right]^2 + \\ &+ [p - p_2(t-\sigma_1)] x'^2 + \left[\theta S(t) - p p_1^{-1} q_1 - \frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1') \right] x^2 \quad (13) \end{aligned}$$

其中 $Z(t)$ 如 (4) 式所定义, θ 和 $S(t)$ 如引理 3 所给。

证明 与引理 4 的证明类似, 对 (13) 式的左边直接计算并结合 (1) 式和 (7) 式及引理 1, 则当 $t \geq T_1$

$$\begin{aligned} \left[\left(p x' - \frac{x p_2 Z'}{Z(t-\sigma_1)} \right) x - \frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1') x^2 \right]' &= \\ &= p x'^2 + (p x')' x - 2x x' w(t) - x^2 w'(t) - \left[\frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1') x^2 \right]' \geq \\ &= p x'^2 + (p x')' x - 2x x' w(t) + \theta S(t) x^2 + x^2 \frac{w^2}{p_2(t-\sigma_1)} - \left[\frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1') x^2 \right]' = \\ &= \left[\frac{xw}{\sqrt{p_2(t-\sigma_1)}} - x' \sqrt{p_2(t-\sigma_1)} \right]^2 + [p - p_2(t-\sigma_1)] x'^2 + \\ &+ p' x x - \frac{p}{p_1} (q_1 x^2 + p_1' x' x) + \theta S(t) x^2 - \left[\frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1') x^2 \right]' = \\ &= \left[\frac{xw}{\sqrt{p_2(t-\sigma_1)}} - x' \sqrt{p_2(t-\sigma_1)} \right]^2 + [p - p_2(t-\sigma_1)] x'^2 + \left[\theta S(t) - p p_1^{-1} q_1 - \frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1') \right] x^2 \end{aligned}$$

引理 6 设 $x(t) \in C^1([t_0, \infty), \mathbf{R}), y(t)$ 为方程 (1) 的非平凡解且 $y(t)$ 是非振动的, 则下面不等式最终成立

$$\left[-\frac{x^2 p_2 Z'(t)}{Z(t-\sigma_1)} \right]' \geq \left[\frac{x p_2 Z'(t)}{\sqrt{p_2(t-\sigma_1)} Z(t-\sigma_1)} - x' \sqrt{p_2(t-\sigma_1)} \right]^2 + [\theta S(t) x^2 - p_2(t-\sigma_1) x'^2] \quad (14)$$

其中 $Z(t)$ 如 (4) 式所定义, θ 和 $S(t)$ 如引理 3 所给。

下面的定理可分别由引理 4, 引理 5 或引理 6 推得。

定理 1 设 $x(t)$ 是方程 (1) 的振动解, $\{a_n\}$ 为 $x(t)$ 的实零点序列, 即 $x(a_n) = 0, a_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. 若存在充分大的 $T \geq t_0$ 使得当 $a_n \geq T$ 时

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \left\{ [p_1 - p_2(t - \sigma_1)] x'^2 + [\theta S(t) - q_1] x^2 \right\} dt > 0 \quad (15)$$

其中 θ 和 $S(t)$ 如引理 3 所给, 则方程 (2) 是振动的.

证明 若不然, 不失一般性设方程 (2) 存在非平凡解 $y(t)$ 使 $y(t) > 0, y(t - \tau) > 0, y(t - \sigma_1) > 0, y(t - \sigma_2) > 0, t \geq T_1 \geq T$, 取 $a_n \geq T_1$, 则 $y(t) > 0, y(t - \tau) > 0, y(t - \sigma_1) > 0, y(t - \sigma_2) > 0, t \in [a_n, a_{n+1}]$, 且 (12) 式成立 (由引理 4). 对 (12) 式从 a_n 到 a_{n+1} 积分, 得

$$\begin{aligned} & \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left[\frac{x}{Z(t - \sigma_1)} (p_1 x' Z(t - \sigma_1) - x p_2 Z') \right]' dt \geq \\ & \int_{a_n}^{a_{n+1}} p_2 \left[\frac{p_2 x Z'}{\sqrt{p_2(t - \sigma_1) Z(t - \sigma_1)}} - x' \sqrt{p_2(t - \sigma_1)} \right]^2 dt + \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left\{ [p_1 - p_2(t - \sigma_1)] x'^2 + [\theta S(t) - q_1] x^2 \right\} dt \end{aligned} \quad (16)$$

由假设, (16) 式的左边应大于零, 但 (16) 的右端却为

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \left[\frac{x}{Z(t - \sigma_1)} (p_1 x' Z(t - \sigma_1) - x p_2 Z') \right]' dt = \left[\frac{x}{Z(t - \sigma_1)} (p_1 x' Z(t - \sigma_1) - x p_2 Z') \right]_{a_n}^{a_{n+1}} = 0$$

产生矛盾. 这说明方程 (2) 的每一个非平凡解 $y(t)$ 至少有一个零点 $t_n \in (a_n, a_{n+1})$. 注意到 $a_{n+1} > t_n > a_n \geq T_1, n \in \mathbf{N}$, 知方程 (2) 的每一个非平凡解 $y(t)$ 有任意大零点, 从而方程 (2) 是振动的.

推论 1 设方程 (1) 是振动的. 如果 $p_1 \geq p_2(t - \sigma_1), \theta S(t) \geq q_1$ 最终成立且在 $[t_0, \infty]$ 的任意子区间上等号不成立, 其中 θ 和 $S(t)$ 如引理 3 所给, 则方程 (2) 是振动的.

定理 2 设 $x(t)$ 是方程 (1) 的振动解, $\{a_n\}$ 为 $x(t)$ 的实零点序列, 即 $x(a_n) = 0, a_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. 若存在 $p \in C^2([t_0, +\infty), \mathbf{R}_+)$ 及充分大的 $T \geq t_0$ 使得当 $a_n \geq T$ 时

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \left\{ [p - p_2(t - \sigma_1)] x'^2 + \left[\theta S(t) - p p_1^{-1} q_1 - \frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1') \right] x^2 \right\} dt > 0 \quad (17)$$

则方程 (2) 是振动的.

推论 2 设方程 (1) 是振动的. 若存在 $p \in C^2([t_0, +\infty), \mathbf{R}_+)$ 使 $p \geq p_2(t - \sigma_1), \theta S(t) \geq p p_1^{-1} q_1 + \frac{1}{2} (p' - p p_1^{-1} p_1')$ 最终成立且在 $[t_0, \infty]$ 的任意子区间上等号不成立, 其中 θ 和 $S(t)$ 如引理 3 所给, 则方程 (2) 是振动的.

定理 3 设 $x(t)$ 是方程 (1) 的振动解, $\{a_n\}$ 为 $x(t)$ 的实零点序列, 即 $x(a_n) = 0, a_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. 若存在充分大的 $T \geq t_0$ 使得当 $a_n \geq T$ 时

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} [\theta S(t) x^2 - p_2(t - \sigma_1) x'^2] dt > 0 \quad (18)$$

其中, θ 和 $S(t)$ 如引理 3 所给, 则方程 (2) 是振动的.

定理 2 和定理 3 的证明与定理 1 类似, 可分别利用引理 5 和引理 6 证之, 兹略去.

参考文献:

- [1] ERBE L H, KONG Q K, ZHANG B G. Oscillation Theory for Functional Differential Equations[M]. New York: Marcel Dekker, 1995.
- [2] 张炳根. 泛函微分方程振动理论的发展[J]. 科学通报, 1998, 4: 345—353.
- [3] 郭嫄, 张炳根. 非线性中立型时滞微分方程解的振动性[J]. 青岛海洋大学学报, 2003, 33(3): 483—488.
- [4] PICONE M. Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale linear ordinaria del second ordin[e] [J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1910, 11: 11—41.
- [5] JAROS J, KUSANO T, YOSHIDA N. Forced suplinear oscillation via Pione's identity[J]. Acta Math Univ Commenianae, 2000, 69: 107—113.
- [6] 庄容坤. 二阶非线性微分方程解的 Sturm 比较定理[J]. 高校应用数学学报, 2003, 18A(2): 133—138.
- [7] BECKENBACH F, BELLMAN R. Inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1961.

(下转第 12 页)

$f_1(\alpha_j)$ is not a boundary geodesic. And consider the corresponding part X_2^* on X_2 . Repeat the previous discussion, we know by (3) that $d(X_1^*, X_2^*) = 0$. Because X_1^* and X_2^* are of topological finite type, X_1^* is isometric to X_2^* and preserves the marking. This implies that the gluing types of the cutting curves $f_1(\alpha_j)$ and $f_2(\alpha_j)$ are the same. Because $f_1(\alpha_j)$ and $f_2(\alpha_j)$ are arbitrary, X_1 is isometric to X_2 and preserves the marking. This means $[X_1, f_1] = [X_2, f_2]$.

By the same way as in section 2, we can define the d -structure, the d_T -structure and the H -structure on $T(X)$ of the topological infinite type.

The same as the proof of the Theorem 3, we have,

Corollary 2 The d -structure and the H -structure on Teichmüller space of Riemann surfaces of topological infinite type are topologically equivalent to each other.

It's natural to ask the following problem: Is the d -structure topologically equivalent to the d_T -structure on the Teichmüller spaces of topological infinite type Riemann surfaces.

References:

[1] ABIKOFF W. The real analytic theory of Teichmüller space, Lecture Notes in Math [M]. Berlin/New York: Springer-Verlag, 1980: 820.

[2] SORVALI T. The boundary mapping induced by an isomorphism of covering groups [J]. Ann Acad Sci Fenn Series A I Math, 1972, 526: 1—31.
[3] LI Z. Teichmüller metric and length spectrum of Riemann surface [J]. Science in China Series A, 1986, 3: 802—810.
[4] LIU L X. On the length spectrum of non-compact Riemann surface [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 1999, 24: 11—22.
[5] THURSTON W P. Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces [EB/OL]. <http://front.math.ucdavis.edu/math.GT/9801019>.
[6] THURSTON W P. Three dimensional geometry and topology [M]. Princeton: Princeton University Press, 1997.
[7] KERCKHOFF S P. The asymptotic geometry of Teichmüller space [J]. Topology, 1980, 19: 23—41.
[8] MINSKY Y N. Extremal length estimates and product regions in Teichmüller space [J]. Duke Math J, 1996, 83 (2): 249—286.
[9] GARDINER F B, MASUR H. Extremal length geometry of Teichmüller space [J]. Complex Variables, 1991, 16: 209—237.
[10] MASKIT B. Comparison of hyperbolic length and extremal length [J]. Ann Acad Sci Fenn Series A, I Math, 1985, 10: 381—386.
[11] MINSKY Y N. Harmonic maps, length, and energy in Teichmüller space [J]. J Diff Geom, 1992, 35: 151—217.

Teichmüller 空间的拓扑结构

刘立新

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究了有限维 Teichmüller 空间上的拓扑结构, 证明了有限维 Teichmüller 空间中一些拓扑结构的相互拓扑等价性. 证明了可以利用黎曼曲面的长度谱定义无穷维 Teichmüller 空间上的一个度量.

关键词: Teichmüller 空间; 黎曼面; 拓扑结构

中图分类号: O174.5

(上接第 8 页)

Sturm Comparison Theorems for Second Order Neutral Nonlinear Differential Equations

ZHUANG Rong kun, ZHU Si ming, WANG Qi ru

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Some differential inequalities are established, and the oscillation for the second order neutral nonlinear differential equations are discussed and some Sturm comparison theorems are obtained. The results generalize some classical Sturm comparison theorems.

Key words: neutral differential equation; differential inequality; oscillation; Sturm comparison theorem