

一类本原有向图的第 k 个顶点指数的研究*

庄晓琼

(华南师范大学学报编辑部, 广东 广州 510631)

摘 要: 广义本原指数的上界和相应的指数集的确定是广义本原指数研究的重要问题。给出了围长为 2 的 n 阶本原有向图的第 k 个顶点指数 ($\exp_D(k)$) 的上界及相应的指数集。

关键词: 本原有向图; 顶点指数; 指数集

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 01-0016-05

1 主要概念及相关引理

以与有向图相关联的非记忆通讯系统为背景, Brualdi 等^[1]在 1990 年提出了本原有向图的广义指数的概念, 并在计算机科学、概率论等数学分支上得到了应用。在广义本原指数的研究中的一个问题是研究各类本原有向图的广义本原指数的上界和指数集, 前人得到了一些令人满意的结果。例如, Brualdi 等^[2]及李彬等^[3]研究了对称本原有向图的广义指数的上界和相应的指数集。等等。

对广义本原指数集研究的另一方面是研究各种特殊的本原矩阵类的指数集, 本文主要给出了围长为 2 的 n 阶本原有向图的第 k 个顶点指数 ($\exp_D(k)$) 的上界及相应的指数集。在此, 先给出一些主要概念及相关引理。

定义 1^[4] 一个有向图 D (允许有环但不能有重复弧) 称为是本原有向图, 若存在某个正整数 k , 使 D 中任一点 x 到任一点 y 均有长为 k 的途径。这样的正整数 k 中的最小者称为是 D 的本原指数, 记作 $\gamma(D)$ 。

定义 2^[4] 设 D 是有 n 个顶点 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的本原有向图, $\exp_D(i, j)$ 是这样的最小整数 p : 使对于任一整数 $t \geq p$, 从点 i 到点 j ($1 \leq i, j \leq n$) 都有长为 t 的途径。

显然有: 本原指数 $\gamma(G) = \max_{i, j} \{\exp_D(i, j)\}$ 。

定义 3^[4] 顶点 i 的“点指数”为 $\exp_D(i) = \max_j \{\exp_D(i, j)\}$ ($i = 1, \dots, n$), 即 $\exp_D(i)$ 是这样的最小整数 p , 使从点 i 到每一点 j 都有长不小于 p 的途径。

定义 4^[4] 若 n 阶本原有向图 D 中顶点 $v_1, \dots,$

v_k , 经过适当排序后有:

$$\exp_D(v_1) \leq \exp_D(v_2) \leq \dots \leq \exp_D(v_n)$$

则称 $\exp_D(v_k)$ (即 D 中第 k 小的点指数) 为 D 的第 k 个广义本原指数, 记作 $\exp_D(k)$ 。

显然有: $\exp_D(1) \leq \exp_D(2) \leq \dots \leq \exp_D(n)$, 特别, $\exp_D(n)$ 就是 D 的本原指数 $\gamma(D)$ 。

定义 5^[5] $L(G)$ 表示有向图 G 的所有圈的不同长度所构成的正整数集, $\bar{R} = \{r_1, r_2\}$ 表示 $\bar{R} = \{r_1, r_2\} \subset L(G)$ 且 G 中至少有两个长分别为 r_1, r_2 的圈 c_1, c_2 ($r_1 < r_2$) 使 $V(c_1) \subset V(c_2)$, c_1, c_2 合称为 (r_1, r_2) 套圈。

强连通有向图 G 的围长是指 G 中最小圈的长度。

引理 1^[6] 图 G 为本原的充要条件是: G 满足: (1) G 是强连通的; (2) G 的圈长集合 $L(G) = \{r_1, \dots, r_k\}$ 是互素的。

定义 6^[5] 设 $R = \{r_{i_1}, \dots, r_{i_t}\} \subseteq L(G) = \{r_1, \dots, r_k\}$ 且 $\gcd(r_{i_1}, \dots, r_{i_t}) = 1$, 其中 $L(G)$ 表示有向图 G 的所有圈的不同长度所构成的正整数集, G 中点 P_i 到点 P_j 的相应于 R 的广义相对距离 $d_R(P_i, P_j)$ 是 G 中从 P_i 到 P_j 的接触 R 中所有圈长 $r_{i_1}, \dots, r_{i_t}$ (只要和一个长为 r 的圈有公共点就称接触了数 r) 的最短通道的长。

引理 2^[6] 若 P_i, P_j 为本原有向图 G 中任意两点, $R = \{r_{i_1}, \dots, r_{i_t}\} \subseteq L(G) = \{r_1, \dots, r_k\}$ 且 $\gcd(r_{i_1}, \dots, r_{i_t}) = 1$, 则 $\exp_G(P_i, P_j) \leq d_R(P_i, P_j) + \phi_R$, 于是有

$$\gamma(G) \leq \max_{P_i, P_j \in V(G)} d_R(P_i, P_j) + \phi_R$$

* 收稿日期: 2003-03-17

作者简介: 庄晓琼 (1973 年生), 女, 编辑; E-mail: gzh_joan@163.com

这里, ϕ_R 是 $\{r_{i_1}, \dots, r_{i_t}\}$ 的 Frobenius 数, 特别地, 若

$$R = \{a_1, a_2\}, (a_1, a_2) = 1$$

则

$$\phi_R = (a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1)$$

为研究指数集, 有必要给出:

定义 7 全体含 (r_1, r_2) 套圈的 n 阶本原有向图的指数构成的正整数集合 $E_{r_1, r_2}(k)$, 称为含 (r_1, r_2) 套圈的 n 阶本原有向图的第 k 个广义本原指数集, 即 $E_{r_1, r_2}(k) = \{m \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{存在某个含}(r_1, r_2)\text{套圈的 } n \text{ 阶本原有向图 } D, \text{使 } \exp_D(k) = m\}$ 。

定义 8 全体围长为 2 的 n 阶本原有向图的指数构成的正整数集合 $E_2(k)$, 称为围长为 2 的 n 阶本原有向图的第 k 个广义本原指数集, 即 $E_2(k) = \{m \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{存在某个围长为 } 2 \text{ 的 } n \text{ 阶本原有向图 } D, \text{使 } \exp_D(k) = m\}$ 。

2 主要结论

首先, 研究围长为 2 的 n 阶本原有向图的其中一类本原有向图——含 $(2, r)$ 套圈的 n 阶本原有向图的第 k 个顶点指数 ($\exp_D(k)$) 的上界及指数集。

在文[1]、[5] 及 [7] 中, 分别得到:

引理 3^[5] 若 n 阶本原矩阵 A 所对应的伴随有向图 $G(A)$ 有 $\bar{R} = \{2, r\} \subset L(G)$, r 为奇数, $r \geq 3$, 则 $\gamma(A) \leq 2n + r - 4$ 。

引理 4^[7] 若 r 是奇数, $3 \leq r \leq n - 2$, 则存在 n 阶本原矩阵 A , 其对应的本原有向图 $G(A)$ 有 $(2, r)$ 套圈, 使 $\gamma(A) = 2n + r - 4$ 。

引理 5^[1] $\exp_D(k) \leq \exp_D(1) + (k - 1)$

由此可得以下定理 1。

定理 1 设 G 为含 $(2, r)$ 套圈的 n 阶本原有向图, r 是奇数, $3 \leq r \leq n - 2$, 则 G 的第 k 个顶点指数的最大值 $\exp_{(2, r)}(k)$ 为

$$\exp_{(2, r)}(k) = n + r + k - 4$$

证明 (1) 取 $R = \{2, r\}$, 设 u, v 形成 $(2, r)$ 套圈上的 2 圈, $(2, r) = 1$, 则点 u 到 G 中任一点 w 至多用长为 $n - 1$ 的路, 则

① 若点 u 到点 w 用长为 $n - 1$ 的路, 则点 v 必在 $(n - 1) -$ 路上, 即点 v 到点 w 至多用长为 $n - 2$ 的路, 故

$$\exp_G(1) \leq d_R(v, w) + \phi(2, r) \leq n + r - 3$$

② 若点 u 到点 w 用长不大于 $n - 2$ 的路, 则

$$\exp_G(1) \leq d_R(u, w) + \phi(2, r) \leq n + r - 3$$

结合①、②, 有 $\exp_{(2, r)}(1) \leq n + r - 3$ 。

(2) 由引理 4 和引理 5 可知, 存在含 $(2, r)$ 套圈的 n 阶本原有向图 G_0 , 有

$$\exp_{G_0}(1) + n - 1 \geq \exp_{G_0}(n)$$

故 $\exp_{(2, r)}(1) \geq \exp_{G_0}(1) \geq n + r - 3$

由(1)、(2), 得 $\exp_{(2, r)}(1) = n + r - 3$ 。从而可得

$$\begin{aligned} \exp_D(k) &\leq \exp_D(1) + (k - 1) \leq \\ &n + r - 3 + (k - 1) = n + r + k - 4 \end{aligned}$$

由引理 4 知必有一本原有向图 A , 使得当 $3 \leq r \leq n - 2$ 时有

$$\exp_A(n) = \gamma(A) = 2n + r - 4$$

于是

$$\exp_A(k) \geq \exp_A(n) - (n - k) = n + r + k - 4$$

从而可得

$$\exp_{(2, r)}(k) = n + r + k - 4$$

为了方便表述起见, 使用如下符号: $V(D)$ 表示有向图 D 的顶点集, $E(D)$ 表示有向图 D 的弧之集, (i, j) 表示有向图 D 中从顶点 i 到顶点 j 的一条弧, $[i, j]$ 表示有向图 D 中顶点 i 与顶点 j 之间的双向连通边, $1 \leq i, j \leq n, i, j \in \mathbb{Z}^+$ 。

引理 6 设 n, k 为正整数, r 是奇数, $3 \leq r \leq \{n/2\}$ ($\{n/2\}$ 表不小于 $n/2$ 的最小整数), 则

$$\{n + k - 1, n + k, \dots, n + k + r - 4\} \subseteq E_{2, r}(k)$$

证明 考察含 $(2, r)$ 套圈的 n 阶本原有向图 G_1 , $V(G_1) = \{1, 2, \dots, n\}$, $E(G_1) = \{(i, i - 1) \mid 3 \leq i \leq n\} \cup \{[1, 2]\} \cup \{(1, r), (h, n) \mid r \text{ 是奇数}, 3 \leq r \leq \{n/2\}, 3 \leq h \leq r\}$ 。则 $r \leq n - h + 1$, 取 $\bar{R} = \{2, r\}$, 对 $\forall k \in V(G_1)$, 有

$$\exp_{G_1}(k) \leq \max d_{\bar{R}}(k, j) + \phi(2, r) =$$

$$d_{\bar{R}}(k, r + 1) + (r - 1) = n + k + r - h - 1$$

而点 k 到点 $r + 1$ 不存在接触 $\bar{R}$ 的且长为 $(n + k - h) + p$ 的有向通道, 这里 p 是奇数且 $1 \leq p \leq \min(n - h, r - 1) = r - 1$ 。

以下记从点 k 到点 $r + 1$ 不接触 $\bar{R} = \{2, r\}$ 的有向通道长为 Φ , 则:

(1) $1 \leq k \leq h - 1$ 时, 不存在从点 k 到点 $r + 1$ 的不接触 $\bar{R}$ 的有向通道。

(2) $h \leq k \leq r$ 时, $\Phi = n + k - h - r + a(n - h + 1)$, a 为非负整数。考察方程

$$n + k - h - r + a(n - h + 1) = (n + k - h) + p$$

取 $p = r - 2$, 则

$$\begin{aligned} n + k - h - r + a(n - h + 1) &= \\ (n + k - h) + r - 2 \end{aligned}$$

即

$$a = \frac{2r - 2}{n - h + 1} \quad (1)$$

若 $n - h + 1 \geq 2r - 2$, 则

$$h \leq 2r - n - 3 \quad (2)$$

由 $3 \leq r \leq \{n/2\}$, 可得 $2r - n - 3 < 0$, 由(2)式, 有 $h \leq 0$, 与已知 $3 \leq h \leq r$ 矛盾。

所以 $n - h + 1 < 2r - 2$, 则(1)式可化为

$$a = 1 + \frac{2r - n + h - 3}{n - h + 1} \quad (3)$$

由 $3 \leq r \leq \{n/2\}$, 可推得 $\{n/2\} + 2 \leq n - r + 2 \leq n - 1$; 又 $3 \leq h \leq r$, 则必有 $h < n - r + 2$ 。从而有 $2r - n + h - 3 < n - h + 1$, 由(3)式, a 不是整数。即当 $h \leq k \leq r$ 时, 不存在从点 k 到点 $r + 1$ 不接触 $\bar{R}$ 的长为 $n + k + r - 2 - h$ 的有向通道。

(3) $r + 1 \leq k \leq n$ 时, $\Phi = k - (r + 1) + a(n - h + 1)$, a 为非负整数。考察方程

$$k - (r + 1) + a(n - h + 1) = n + k - h + p$$

令 $p = r - 2$, 则有

$$k - r - 1 + a(n - h + 1) = n + k - h + r - 2$$

$$\text{即 } a = 1 + \frac{2r - 2}{n - h + 1}$$

由(2)的讨论立即可知 a 不是整数, 即当 $r + 1 \leq k \leq n$ 时, 不存在从点 k 到点 $r + 1$ 不接触 $\bar{R}$ 的长为 $n + k + r - h - 2$ 的有向通道。

综合(1)、(2)、(3)可知, 从点 k 到点 $r + 1$ 不存在不接触 $\bar{R}$ 的且长为 $n + k + r - h - 2$ 的有向通道。

又, 对 $\forall v \in V(G_1)$, $1 \leq v \leq k$, 显见:

$$\exp_{G_1}(1) \leq \exp_{G_1}(2) \leq \cdots \leq$$

$$\exp_{G_1}(k) = n + k + r - h - 1$$

及对 $\forall v \in V(G_1) \setminus \{1, 2, \dots, k\}$, 有 $\exp_{G_1}(v) \geq n + k + r - h - 1$ 。从而有

$$\exp_{G_1}(k) = n + k + r - h - 1$$

注意到 $3 \leq h \leq r$, 得

$$\{n + k + r - h - 1 \mid 3 \leq h \leq r\} =$$

$$\{n + k - 1, n + k, \dots, n + k + r - 4\} \subseteq E_{2,r}(k)$$

引理7 设 n, k 为正整数, r 是奇数, $3 \leq r \leq \{n/2\}$, 则 $\{k + r - 1, k + r, \dots, n + k - 1\} \subseteq E_{2,r}(k)$ 。

证明 考察含 $(2, r)$ 套圈的 n 阶本原有向图 G_2 , $V(G_2) = \{1, 2, \dots, n\}$, $E(G_2) = \{(i, i - 1) \mid h + 1 \leq i \leq n\} \cup \{[j, j - 1] \mid 2 \leq j \leq h\} \cup \{(1, r), (1, h), (1, n)\}$ 。其中 r 是奇数, $3 \leq r \leq \{n/2\}$, $r \leq h \leq n - 1$ 。取 $\bar{R} = \{2, r\}$, 对 $\forall k \in V(G_2)$, 有

$$\exp_{G_2}(k) \leq d_{\bar{R}}(k, h + 1) + \phi(2, r) =$$

$$n + k + r - h - 2$$

类似引理6的证明, 可得

$$\exp_{G_2}(k) = n + k + r - h - 2$$

注意到 $r \leq h \leq n - 1$, 得

$$\{n + k + r - h - 2 \mid r \leq h \leq n - 1\} =$$

$$\{k + r - 1, k + r, \dots, n + k - 1\} \subseteq E_{2,r}(k)$$

引理8 设 n, k 为正整数, r 是奇数, $3 \leq r \leq \{n/2\}$, 则

$$\{k + 2, k + 3, \dots, n + k - r + 1\} \subseteq E_{2,r}(k)$$

证明 考察含 $(2, r)$ 套圈的 n 阶本原有向图 G_3 , $V(G_3) = \{1, 2, \dots, n\}$, $E(G_3) = \{(i, i - 1) \mid 2 \leq i \leq n\} \cup \{(1, j) \mid 2 \leq j \leq h - 1, r \leq h - 1 \leq n - 1, r \text{ 是奇数}, 3 \leq r \leq \{n/2\}\} \cup \{(1, n)\}$ 。则 G_3 必含有 $(2, 3)$ 套圈, 取 $\bar{R} = \{2, 3\}$, 对 $\forall k \in V(G_3)$, 有 $\exp_{G_3}(k) \leq d_{\bar{R}}(k, h) + \phi(2, 3) = n + k - h + 2$ 。类似引理6的证明, 可得

$$\exp_{G_3}(k) = n + k - h + 2$$

注意到 $r \leq h - 1 \leq n - 1$, 得

$$\{n + k - h + 2 \mid r \leq h - 1 \leq n - 1\} =$$

$$\{k + 2, k + 3, \dots, n + k - r + 1\} \subseteq E_{2,r}(k)$$

引理9 设 n, k 为正整数, r 是奇数, $3 \leq r \leq \{n/2\}$, 则

$$\{3, 4, \dots, k + 1\} \subseteq E_{2,r}(k)$$

证明 考察 n 阶本原有向图 G_4 , $V(G_4) = \{1, 2, \dots, n\}$, $E(G_4) = \{(i, i - 1) \mid 2 \leq i \leq h\} \cup \{(1, j) \mid 2 \leq j \leq h\} \cup \{[h, p] \mid h + 1 \leq p \leq n\} \cup \{[q, q + 1] \mid h + 1 \leq q \leq n - 1\}$, 其中, h 为整数, $1 \leq h \leq n - 1$ 。显然, G_4 必含 $(2, r)$ 套圈, $(2, 3)$ 套圈, r 是奇数, $3 \leq r \leq \left\{\frac{n}{2}\right\}$ 。取 $\bar{R} = \{2, 3\}$, 对 $\forall k \in V(G_4)$, 有

$$\exp_{G_4}(k) = \begin{cases} k + h, & 1 \leq k \leq h - 1; \\ h + 1, & k = h; \\ h + 2, & h + 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

从而对 $\forall k \in V(G_4)$, 必可找到一正整数 h , 使得 $h + 1 \leq k \leq n$, 有

$$\{h + 2 \mid 2 \leq h + 1 \leq k\} =$$

$$\{3, 4, \dots, k + 1\} \subseteq E_{2,r}(k)$$

引理10 设 n, k 为正整数, 存在本原有向图 G_5 , $V(G_5) = \{1, 2, \dots, n\}$, $E(G_5) = \{[i, j] \mid i, j \in V(G_5), i \neq j\}$, 则 $\exp_{G_5}(k) = 2$ 。

证明略。

从而可得以下定理2。

定理2 设 n, k 为正整数, r 为奇数, $3 \leq r \leq \{n/2\}$, 则

$$E_{2,r}(k) = \{2, 3, \dots, n + k + r - 4\}$$

证明 由定理1知

$$E_{2,r}(k) \subseteq \{1, 2, \dots, n+k+r-4\}$$

由引理6-引理10, 得:

$$\{2, 3, \dots, n+k+r-4\} \subseteq E_{2,r}(k)$$

又由于所考虑的本原有向图不含环, 则 $1 \notin E_{2,r}(k)$, 从而有

$$E_{2,r}(k) = \{2, 3, \dots, n+k+r-4\}$$

陈小亘^[8]得到了:

引理11^[8] $n(\geq 3)$ 阶围长为2的本原有向图的最小顶点指数的最大值 $\exp_2(n, 1)$ 是: 若 n 是奇数, 则 $\exp_2(n, 1) = 2n - 3$; 若 n 是偶数, 则 $\exp_2(n, 1) = 2n - 4$.

在此, 进一步得到了围长为2的 n 阶本原有向图的 $\exp_D(k)$ 的上界及其指数集。

定理3 设 D 是围长为2的 n 阶本原有向图, 则

$$\exp_D(k) \leq \begin{cases} 2n+k-4, & n \text{ 为奇数,} \\ 2n+k-5, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

证明 由引理11, 可以得到

(1) 当 n 为奇数时, $\exp_D(1) \leq 2n - 3$

(2) 当 n 为偶数时, $\exp_D(1) \leq 2n - 4$

故有

$$\exp_D(k) \leq \exp_D(1) + (k-1) \leq \begin{cases} 2n+k-4, & n \text{ 为奇数,} \\ 2n+k-5, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

引理12 设 n 为奇数, k 为正整数, 则有

$$\left\{\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}, \dots, 2n+k-4\right\} \subseteq E_2(k)$$

证明 考察有向图 D_1 , $V(D_1) = \{1, 2, \dots, n\}$, $E(D_1) = \{(i, i-1) | h+1 \leq i \leq n\} \cup \{[j, j+1] | 1 \leq j \leq h-1\} \cup \{(1, n)\}$, 其中, $2 \leq h \leq n-1$, n 为奇数. 则 D_1 必是一本原有向图. 对 D_1 的第 k 个顶点, 分以下2种情形讨论:

情形1: $h \leq k \leq n-1$ 时, 有

$$\exp_{D_1}(k) \leq d_{\bar{R}}(k, h+1) + \phi(2, n) = 2n+k-h-2$$

情形2: $1 \leq k \leq h-1$ 时, 又有:

① 当 $2 \leq h \leq \frac{n+1}{2} + k - 1$ 时, 有

$$\exp_{D_1}(k) \leq d_{\bar{R}}(k, h+1) + \phi(2, n) = 2n+k-h-2$$

② 当 $\frac{n+1}{2} + k \leq h \leq n-1$ 时, 有

$$\exp_{D_1}(k) \leq d_{\bar{R}}(k, h) + \phi(2, n) = n+h-k-1$$

而当 $h \leq k \leq n-1$ 时, 点 k 到点 $h+1$ 不存在长为 $n+k-(h+1)+j$ ($1 \leq j \leq n-2, j$ 为奇数) 的有向途径. 对 $\forall p > k, \max d_{\bar{R}}(p, j) = d_{\bar{R}}(p, h+1) =$

$n+p-h-1 > d_{\bar{R}}(k, h+1)$, 即 $\exp_{D_1}(p) > \exp_{D_1}(k)$, 故当 $h \leq k \leq n-1$ 时, 有

$$\exp_{D_1}(k) = 2n+k-h-2$$

类似地可证得:

$$\exp_{D_1}(k) = \begin{cases} 2n+k-h-2, & 1 \leq k \leq h-1, \\ 2 \leq h \leq \frac{n+1}{2} + k - 1; \\ n+h-k-1, & 1 \leq k \leq h-1, \\ \frac{n+1}{2} + k \leq h \leq n-1; \\ 2n+k-h-2, & h \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

故对第 k 个顶点, 必可找到一正整数 h , 使得 $2 \leq h \leq k$, 有

$$\exp_{D_1}(k) = 2n+k-h-2$$

即有 $\{2n+k-h-2 | 2 \leq h \leq k\} = \{2n-2, \dots, 2n+k-4\} \subseteq E_2(k)$;

或对第 k 个顶点, 必可找到一正整数 h , 使得 $k \leq h-1 \leq \frac{n+1}{2} + k - 2$, 有

$$\exp_{D_1}(k) = 2n+k-h-2$$

即有

$$\left\{2n+k-h-2 | k \leq h-1 \leq \frac{n+1}{2} + k - 2\right\} = \left\{\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}, \dots, 2n-3\right\} \subseteq E_2(k)$$

从而有

$$\left\{\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}, \dots, 2n+k-4\right\} \subseteq E_2(k)$$

引理13 设 n 为偶数, k 为正整数, 则

$$\left\{\frac{3n}{2} - 3, \dots, 2n+k-6\right\} \subseteq E_2(k)$$

证明 考察本原有向图 D_2 , $V(D_2) = \{1, 2, \dots, n\}$, $E(D_2) = \{(i, i-1) | h+1 \leq i \leq n\} \cup \{[j, j+1] | 1 \leq j \leq h-1\} \cup \{(1, n-1), (1, n)\}$, 其中, $2 \leq h \leq n-1$, n 为偶数. 类似引理11的证明, 可得:

$$\exp_{D_2}(k) = \begin{cases} 2n+k-h-4, & 1 \leq k \leq h-1, \\ 2 \leq h \leq \frac{n}{2} + k - 1; \\ n+h-k-2, & 1 \leq k \leq h-1, \\ \frac{n}{2} + k \leq h \leq n-1; \\ 2n+k-h-4, & h \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

从而可证得

$$\left\{\frac{3n}{2} - 3, \dots, 2n+k-6\right\} \subseteq E_2(k)$$

引理14 设本原有向图 D_3 为 $V(D_3) = \{1, 2, \dots, n\}$, $E(D_3) = \{(i, i-1) | 3 \leq i \leq n\} \cup \{[1, 2],$

$(1, n-1), (3, n)$, 其中, n 为偶数, k 为正整数, 则

$$\exp_{D_3}(k) = 2n + k - 5$$

证明略。

由定理 3 可得

(1) 当 n 为偶数, $E_2(k) \subseteq \{2, 3, \dots, 2n + k - 5\}$;

(2) 当 n 为奇数, $E_2(k) \subseteq \{2, 3, \dots, 2n + k - 4\}$ 。

由定理 2 及引理 12 ~ 14, 因 $3 \leq r \leq \{n/2\}$, 显然可得:

(1) 当 n 为偶数时, 有

$$\begin{aligned} & \left\{2, 3, \dots, \frac{3n}{2} + k - 5\right\} \cup \\ & \left\{\frac{3n}{2} - 3, \dots, 2n + k - 5\right\} = \\ & \{2, 3, \dots, 2n + k - 5\} \subseteq E_2(k); \end{aligned}$$

(2) 当 n 为奇数时, 有

① 对正整数 $k, 2 \leq k \leq n-1$, 可得:

$$\begin{aligned} & \left\{2, 3, \dots, \frac{3n+1}{2} + k - 5\right\} \cup \\ & \left\{\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}, \dots, 2n + k - 4\right\} = \\ & \{2, 3, \dots, 2n + k - 4\} \subseteq E_2(k) \end{aligned}$$

② 当 $k=1$ 时, 若 $\left\{\frac{n}{2}\right\} = \frac{n+1}{2}$ 为奇数, 由定理

2 及引理 11 - 引理 13, 有

$$\begin{aligned} & \left\{2, 3, \dots, \frac{3n+1}{2} + k - 4\right\} \cup \\ & \left\{\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}, \dots, 2n + k - 4\right\} = \\ & \{2, 3, \dots, 2n + k - 4\} \subseteq E_2(k) \end{aligned}$$

若 $\left\{\frac{n}{2}\right\} = \frac{n+1}{2}$ 为偶数, 考察本原有向图 D_4 ,

$$\begin{aligned} V(D_4) &= \{1, 2, \dots, n\}, \\ E(D_4) &= \{(i, i-1) \mid 3 \leq i \leq n\} \cup \\ & \left\{[1, 2], \left(1, \frac{n+1}{2} + 1\right), (4, n)\right\} \end{aligned}$$

显然有

$$\exp_{D_4}(1) = \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - 1$$

故

$$\begin{aligned} & \{2, 3, \dots, \frac{3n+1}{2} + k - 5\} \cup \\ & \left\{\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}, \dots, 2n + k - 4\right\} \cup \left\{\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - 1\right\} = \\ & \{2, 3, \dots, 2n + k - 4\} \subseteq E_2(k) \end{aligned}$$

由此立即可得定理 4。

定理 4 设 n, k 为正整数, $2 \leq k \leq n-1$, 则有

(1) 当 n 为奇数时, $E_2(k) = \{2, 3, \dots, 2n + k - 4\}$;

(2) 当 n 为偶数时, $E_2(k) = \{2, 3, \dots, 2n + k - 5\}$

致谢: 本文撰写过程中得到导师柳柏濂教授、周波副教授的悉心指导, 在此表示衷心感谢!

参考文献:

- [1] BRUALDI R A, LIU B L. Generalized exponents of primitive directed graphs[J]. J of Graph Theory, 1990, 14(4): 483 - 499.
- [2] BRUALDI R A, SHAO J Y. Generalized exponents of primitive symmetric digraphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1997, 74: 275 - 293.
- [3] 李彬, 邵嘉裕. 对称本原有向图的广义指数集[J]. 高校应用数学学报(A 辑), 1995, 10(4): 425 - 435.
- [4] 柳柏濂. 组合矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [5] 柳柏濂. 关于本原矩阵的本原指数集的分布[J]. 数学学报, 1989, 32(6): 803 - 809.
- [6] 邵嘉裕. 对称本原阵的指数集[J]. 中国科学(A 辑), 1986, 9: 931 - 939.
- [7] 柳柏濂. 关于本原矩阵的连续指数集[J]. 应用数学学报, 1994, 17(1): 15 - 24.
- [8] 陈小亘. 周长为 2 的本原有向图的最小顶点指数[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2000, 28(5): 119 - 121.

The Upper Bound and the Index Set for k -th Generalized Primitive Exponents of Primitive Digraphs with Girth 2

ZHUANG Xiao-qiong

(Editorial Department of Journal of South China Normal University,
South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: The determination of upper bounds and corresponding exponent sets for different digraph classes is an important problem in the study of generalized primitive exponents. An upper bound for k -th generalized primitive exponents of primitive digraphs with order and girth 2 is given, and the exponent set of this class of digraphs is determined.

Key words: primitive digraphs; k -th generalized primitive exponents; the exponent set