

具有通用机的两组工件的排序问题^{*}

丁伟

(中山大学物理系, 广东 广州510275)

摘要: 讨论了具有两台速度不同的专用机, m 台速度相同的通用机的两组工件的 $C_{\max}$ 问题, 提出了改进的 LPT 算法, 得到了最差情况下性能指标的界。

关键词: 排序; 启发式算法; 性能指标; 多组工件; 通用机与专用机

中图分类号: O223 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 02-0033-04

在实际应用中, 存在着一类关于多组工件在多组加工速度不同的机器上的排序问题, 该 $C_{\max}$ 问题要求工件在机器上的一种安排, 使得从第一个工件开始加工时刻起, 到最后一个工件完成加工时刻止的时间跨度最小。对 $C_{\max}$ 问题, 许多学者已经进行了广泛的研究^[1-9], 其中, 文[3] 针对两组工件, 三台机器(两台分别为两组工件的专用机, 一台为通用机, 专用机的速度不同, 且都不小于通用机的速度)的情形进行了讨论, 并得到了严格的界: $T/T^* \leq 4/3$; 文[4] 针对两组工件, 两台速度不同专用机和两台速度相同通用机(专用机的速度不小于通用机的速度)的情形进行了讨论, 并得到了严格的界: $T/T^* \leq 3/2$ 。

本文在文[3, 4] 的基础上讨论一种更为复杂的情形: 有两组工件 $L_r = \{t_i, i \in I_r\}$, $I_r = \{1, 2, \dots, n_r\}$, $r = 1, 2$, n_r 为非负整数, t_i 代表工件并表示其绝对加工时间; 有 $m+2$ 台机器 $\{M_l, l = 1, 2, 3, \dots, m+2\}$, 其中 M_1, M_2 分别为工件 L_1, L_2 的专用机, 其加工速度分别为 s_1, s_2 , 且 $s_l \geq 1$, $l = 1, 2, M_3, M_4, \dots, M_{m+2}$ 为通用机, 其加工速度 $s_l = 1$, $l = 3, 4, \dots, m+2$, 称 t_i/s_l 为工件 t_i 在机器 M_l 上的相对加工时间。假设工件之间是独立的, 与加工次序无关, 加工是不允许中断的, 则问题为: 将两组工件安排在 $m+2$ 台机器上, 使其最后完工时间最小。

当某个 $n_r = 0$ 时, 该问题为经典的一类平行机问题, 由于问题是 NP-C 的, 故许多人研究其近似算法。对于 $s_i = 1, 1 \leq i \leq m$, 且 $s_m = s \geq 1$, Liu 等^[1] 对 LPT 算法求得如下的性能指标界:

$$T/T^* \leq 2(m-1+s)/(s+2), \quad (s \leq 2) \\ T/T^* \leq (m-1+s)/2, \quad (s > 2)$$

其中 T 表示近似算法下目标函数的值, 而 T^* 则表示最优值。

Teofilo 等^[2] 改进为:

$$T/T^* \leq \frac{1+\sqrt{17}}{4}, \quad (m=2)$$

$$T/T^* \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2m}, \quad (m \geq 3)$$

且当 $m=3$ 时, 这是最好的界。

1 M-LPT 算法及有关性质

与经典的 LPT 算法相对应^[1,2], 提出了一种改进的 LPT 算法, 即: M-LPT 算法。本节主要讨论 M-LPT 算法的步骤和相关的重要性质。

M-LPT 算法首先对两组工件按其加工时间的长短从大到小混合排序, 假设用 $t_k(r)$ 表示混合排序后的第 k 个工件, r 表示该工件所属的工件组; 若工件 $t_k(r)$ 先于 $t'_k(r')$ 被分配, 则记作 $t_k(r) < t'_k(r')$; 若工件 $t_k(r)$ 分配给机器 M_l , 则记作 $t_k(r) \in M_l$; $MT_l(k)$ 表示混合排序后第 k 个工件安排之前各机器上的最后完工时间; ML_l 表示第 k 个工件安排之前各机器上的工件集合, 并记

$$MT_l(k) = \sum_{\substack{t_i, (r') \in M_l, t_k(r') < t_k(r)}} t_k(r') \\ l = 1, 2, \dots, m+2$$

$$ML_l(k) = \{t'_k(r') \mid t'_k(r') < t_k(r), t'_k(r') \in M_l\} \quad l = 1, 2, \dots, m+2$$

* 收稿日期: 2003-07-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371136); 广东省自然科学基金资助项目(021765); 中山大学高等学术中心(香港)基金资助项目(03M5)

作者简介: 丁伟(1969年生), 女, 讲师; E-mail: mcszyy@zsu.edu.cn

$$T_r = \sum_{i=1}^n t_{ri} \quad r = 1, 2$$

$L = (L_1, L_2)$ 表示全体工件, $|L_r|$ 表示 L_r 中工件的个数, 记 $|L| = |L_1| + |L_2|$.

M-1PT 算法的步骤:

步骤 1: 初始化

(1) 对工件组排序, 使 $T_1/s_1 \geq T_2/s_2$;

(2) 对每组工件分别排序, 使 $t_{rs} \geq t_{s+1}, s = 1, 2, \dots, n_r - 1, r = 1, 2$;

(3) 对两组工件混合排序, 使 $t_k(r) \geq t_{k+1}(w), k = 1, 2, \dots, n_1 + n_2 - 1, r, w = 1, 2$;

(4) 令 $k = 1, MT_l(k) = 0, ML_l = \emptyset, ss_1 = \{1, 3, 4, \dots, m+2\}, ss_2 = \{2, 3, 4, \dots, m+2\}, l = 1, 2, \dots, m+2$;

步骤 2: 如果 $k > n_1 + n_2$ 则输出解

$$ML_l(k), l = 1, 2, \dots, m+2,$$

$$C_{\max} = \max_l \{MT_l(k)/s_l\}$$

步骤 3: 选择机器

$$u_0 = \min\{u \mid (MT_u(k) + t_k(r))/s_u = \min_{l \in ss_r} \{(MT_l(k) + t_k(r))/s_l\}\}$$

步骤 4:

$$MT_{u_0}(k+1) = MT_{u_0}(k) + t_k(r)$$

$$ML_{u_0}(k+1) = ML_{u_0}(k) \cup \{t_k(r)\}$$

令 $k \leftarrow k+1$, 转到步骤 2.

由算法可知, 工件 t_{11} 必然被安排在机器 M_1 上, 工件 t_{21} 必然被安排在机器 M_2 上.

下面给出 M-1PT 算法的性质.

对于工件 $t_k(r)$ 用 $ST(t_k(r))$ 表示其开始加工的时刻, $CT(t_k(r))$ 表示其完成加工的时刻.

引理 1 若 $t_k(r) < t'_k(r')$, 则 $t_k(r) \geq t'_k(r')$, 且 $CT(t_k(r)) \leq ST(t'_k(r'))$.

证明 结论显然.

引理 2 若在 L 中存在工件 $t_n(r)$, 使得 $CT(t_n(r)) = T$, 且 $n < n_1 + n_2$, 则存在 L' , 满足 $|L'| < |L|$ 且 $T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$.

证明 因为 $CT(t_n(r)) = T$, 且 $n < n_1 + n_2$, 则可令

$$L' = L \setminus \{t_{n+1}(r), t_{n+2}(r), \dots, t_{n_1+n_2}(r)\}$$

由于工件被安排的次序只与工件的顺序有关, 而 L, L' 两组工件中前 n 个工件的加工时间相同, 每个工件所可能选择的加工机器也相同, 且前后工件的大小关系也相同, 机器的选择只与机器的速度和前 n 个工件的分配情况有关, 故 L 与 L' 的 M-1PT

解相同, 即

$$T(L) = T(L')$$

但 $|L'| < |L|$, 必有 $T^*(L') \leq T^*(L)$, 从而有 $T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$. 证毕.

引理 3 若 $CT(t_{n_1+n_2}(r)) = T, T > T^*$ 且在 M-1PT 算法中有一台机器 M_i , 其 $ML_i = \emptyset$, 即没有一个工件被分配到该机器上, 那么在最优排序中也无任何工件在此机器上.

证明 由 $CT(t_{n_1+n_2}(r)) = T$, 而 $ML_i(n_1 + n_2) = \emptyset$ 知, 最后一个工件也没有被分配到 M_i 上, 即有 $t_{n_1+n_2} \geq T$ (由算法知, 必有 $t_{11} \in ML_1, t_{21} \in ML_2, ML_1, ML_2$ 必不空).

假设在最优排序中 $ML_i^* \neq \emptyset$, 即在最优排序中 M_i 上至少有一个工件, 设为 $t_k(s)$, 显然有 $t_k(s) \geq t_{n_1+n_2}(r)$. 因为 $T^* \geq t_k(s)$, 则可得 $T^* \geq t_k(s) \geq t_{n_1+n_2}(r) \geq T$.

若 $T = T^*$, 则 M-1PT 算法已得到了问题的一个最优解, 此解在机器 M_i 上无任何工件.

若 $T^* > T$, 则得矛盾. 证毕.

引理 4 若 $CT(t_{n_1} + n_2(r)) = T$, 且 L 满足下述两个条件之一:

$$(1) \quad t_{n_1+n_2}(r) \in L_1,$$

$$\{t_{2k} \in ML_i, \forall i \in \{3, 4, \dots, m+2\}\} = \emptyset;$$

$$(2) \quad t_{n_1+n_2}(r) \in L_2,$$

$$\{t_{1k} \in ML_i, \forall i \in \{3, 4, \dots, m+2\}\} = \emptyset;$$

则存在 $L', |L'| < |L|$, 且 $T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$.

证明 只证 (1), 可类似证 (2).

由 (1) 知, 在公用机 $M_3, \dots, M_{m+2}$ 上无 L_2 中的工件, 令

$$L'_1 = L_1, \quad L'_2 = \emptyset, \quad L' = (L'_1, L'_2)$$

把 L' 用 M-1PT 算法安排到机器 $M_1, M_2, \dots, M_m + 2$ 上去, 等价于将 L_1 分配到机器 $M_1, M_3, \dots, M_m + 2$ 上去.

把 L 用 M-1PT 算法分配到机器 $M_1, M_2, \dots, M_m + 2$ 上去, 由算法及假设知 L_2 中工件均被分配到机器 M_2 上, 此时也等于是将工件组 L_1 分配到机器 $M_1, M_3, \dots, M_m + 2$ 上去. 由于对 L 而言有

$$t_{n_1+n_2}(r) \in L_1, \quad CT(t_{n_1+n_2}(r)) = T$$

故有 $T(L) = T(L')$, 而由 $|L'| < |L|$ 知

$$T^*(L) \geq T^*(L')$$

所以 $T(L)/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$

证毕.

引理 5 如果在最优排序中公用机 $M_3, M_4, \dots, M_{m+2}$ 均空闲, 则存在机器组 M' , 满足

$$|M'| \leq |M|$$

且 $T(M')/T^*(M') \geq T(M)/T^*(M)$

证明 由假设可令 $M' = \{M_1, M_2\}$ 。

若将 $L = (L_1, L_2)$ 安排到机器组 M' 上去, 此时在最优排序中仍有

$$t_{ri} \in ML_r \quad r = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n_r$$

因此 $T^*(M') = T^*(M)$, 而由 $|M'| \leq |M|$ 知 $T(M) \leq T(M')$, 故有

$$T(M')/T^*(M') \geq T(M)/T^*(M)$$

证毕。

2 M-1PT 算法性能指标的界

本节讨论 M-1PT 算法在最差情况下性能指标的界, 并举例说明这个界是严格的。

定理 1 在 M-1PT 算法下, 把 $L = (L_1, L_2)$ 分配到机器 $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m + 2\}$ 上去, 其中 $M_3, \dots, M_{m+2}$ 为公用机, 其速度为 1, M_1, M_2 分别为 L_1, L_2 的专用机, 其速度大于等于 1, 则近似解 T 与最优解 T^* 之间有关系 $T/T^* \leq 2$ 。

证明 采用反证法。设 (L, M) 是满足以下三个条件的最小反例。

- (1) $T(L)/T^*(L) > 2$;
- (2) 凡使 (1) 成立的 L' 均满足 $|L'| \geq |L|$;
- (3) 凡使 (1), (2) 成立的 M' 均满足 $|M'| > |M|$ 。

若存在 $t_n(r)$, $CT(t_n(r)) = T$, 且 $n < n_1 + n_2$, 则由引理 2 知存在 L' , $|L'| \leq |L|$, 且

$$T(L')/T^*(L') \geq T(L)/T^*(L)$$

这与 L 是满足 $T(L)/T^*(L) > 2$ 的最小工件组相矛盾, 故可设若存在 $t_n(r)$, $CT(t_n(r)) = T$, 必有 $n = n_1 + n_2$ 。

根据引理 3 知在 M-1PT 解中若有机器空闲, 则在最优解中该机器仍然空闲, 因此, 如果将该机器抹去, 即把 L 安排到剩余的 $m + 1$ 台机器上去, 其 T, T^* 值不变, 所以以下的论证都是在假设在 M-1PT 算法下无空闲机器的情形进行的, 即在 M-1PT 算法下, M_i 上至少存在一个工件, 其中 $i = 3, 4, \dots, m + 2$ 。

情形 A: $CT(t_{n_1+n_2}(r)) = T$,

$$t_{n_1+n_2}(r) \in L_1;$$

情形 A1 $t_{n_1+n_2}(r) \in ML_1$

则此时有 $MT_1 = s_1 T$,

$$MT_i + t_{n_1+n_2}(r) \geq T, i = 3, 4, \dots, m + 2,$$

即

$$MT_1 + \sum_{i=3}^{m+2} MT_i \geq s_1 T + m(T - t_{n_1+n_2}(r))p$$

情形 A2:

$$t_{n_1+n_2}(r) \in ML_p, p = 3, 4, \dots, m + 2$$

则 $MT_p = T, (MT_1 + t_{n_1+n_2}(r))/s_1 > T$

即 $MT_1 > s_1 T - t_{n_1+n_2}(r)$,

$$MT_i + t_{n_1+n_2}(r) \geq T,$$

$$i = 3, 4, \dots, m + 2, i \neq p$$

因此 $MT_1 + \sum_{i=3}^{m+2} MT_i > s_1 T - t_{n_1+n_2}(r) +$

$$T + (m - 1)(T - t_{n_1+n_2}(r)) =$$

$$s_1 T + m(T - t_{n_1+n_2}(r))$$

由引理 4 知存在 t_{2k} 及机器 $M_l, t_{2k} \in ML_l$, 其中 $k = 1, \dots, n_2, l = 3, \dots, m + 2$ 。

假设在混合排序中 t_{2k} 排在第 u 个位置。即

$$t_u(2) = t_{2k}。$$

因此有

$$(MT_2(u) + t_{2k})/s_2 > MT_l(u) + t_{2k}$$

而 $MT_l(u) + t_{2k} \geq t_{2k}$

所以 $MT_2(u) > (s_2 - 1)t_{2k}$

根据算法知 $MT_2 \geq MT_2(u), t_{2k} \geq t_{n_1+n_2}(r)$

所以 $MT_2 \geq MT_2(u) > (s_2 - 1)t_{n_1+n_2}(r)$

$$T^* \geq (T_1 + T_2)/(m + s_1 + s_2) \geq$$

$$(MT_1 + MT_2 + \sum_{i=3}^{m+2} MT_i)/(m + s_1 + s_2) \geq$$

$$(s_1 T + m(T - t_{n_1+n_2}(r)) +$$

$$(s_2 - 1)t_{n_1+n_2}(r))/(m + s_1 + s_2) =$$

$$((s_1 + m)T + (s_2 - m - 1)t_{n_1+n_2}(r))/(m + s_1 + s_2)$$

即

$$T/T^* \leq \frac{m + s_1 + s_2}{m + s_1} + \frac{m + 1 - s_2}{m + s_1} t_{n_1+n_2}(r)/T^* =$$
$$1 + \frac{s_2 T^* + (m + 1 - s_2)t_{n_1+n_2}(r)}{(m + s_1)T^*}$$

若在最优排序中在 m 台公用机上无任何工件, 则由引理 5 知存在机器组 M' , 使得

$$|M'| \leq |M|,$$

$$T(M')/T^*(M') \geq T(M)/T^*(M)$$

这与 M 是满足 (1) - (3) 的最小机器组相矛盾。

因此可设在最优排序中在公用机上至少有一个工件, 设为 $t_v(r)$, 则显然有 $t_v(r) \geq t_{n_1+n_2}(r)$, 且有

$$T^* \geq t_v(r)$$

$$\text{故 } T^* \geq t_{n_1+n_2}(r)$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } s_1 \geq 1, \text{ 所以 } (s_1 + m)T^* &\geq (1 + m)T^* \\ (s_1 + m - s_2)T^* &\geq (m + 1 - s_2)T^* \geq \\ &(m + 1 - s_2)t_{n_1+n_2}(r) \end{aligned}$$

$$\text{即 } s_2 T^* + (m + 1 - s_2)t_{n_1+n_2}(r) \leq (s_1 + m)T^*$$

$$\text{所以 } \frac{s_2 T^* + (m + 1 - s_2)t_{n_1+n_2}(r)}{(s_1 + m)T^*} \leq 1$$

$$\text{因此得 } T/T^* \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \text{情形 B } CT(t_{n_1+n_2}(r)) &= T, \\ t_{n_1+n_2}(r) &\in L_2 \end{aligned}$$

其证明过程与情形 A 相类似, 故从略。

综上, 在 M-LPT 算法下有 $T/T^* \leq 2$ 。证毕。

例 设

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a-2, 1, 1, \dots, 1 (\text{共 } m \text{ 个 } 1)\}, L_2 = \{1, 1\} \\ s_1 &= a-1-\epsilon', s_2 = 1 \end{aligned}$$

其中 $a > 3, \epsilon' > 0$, 充分小。

根据 M-LPT 算法知

$$t_{11} > t_{12} = \dots = t_{1m+1} = t_{21} = t_{22} = 1$$

利用 M-LPT 算法的问题的一个可行解为:

$$\begin{aligned} ML_1 &= \{a-2\} \\ ML_i &= \{t_{1i-1} = 1\} \quad i = 3, 4, \dots, m+2 \\ ML_2 &= \{1, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{故有 } T = \max\left\{\frac{a-2}{a-1-\epsilon'}, 1, 2\right\} = 2$$

而最优解为:

$$\begin{aligned} ML_1 &= \{a-2, 1\}; \quad ML_2 = \{t_{21} = 1\} \\ ML_i &= \{t_{1i} = 1\} \quad i = 3, \dots, m+1 \\ ML_{m+2} &= \{t_{22} = 1\} \end{aligned}$$

$$\text{故 } T^* = \max\left\{\frac{a-2+1}{a-1-\epsilon'}, 1\right\} = \frac{a-1}{a-1-\epsilon'},$$

$$\text{即 } T/T^* = 2(a-1-\epsilon')/(a-1) = 2-2\epsilon'/(a-1)$$

$$\text{令 } \epsilon = 2\epsilon'/(a-1), \text{ 则有 } T/T^* = 2-\epsilon.$$

注记 以上例子表明在 M-LPT 算法下, 存在工件组 L 使得 $T/T^* = 2-\epsilon$ 。即定理 1 的界是严格的。

参考文献:

- [1] LIU J W S, LIU C L. Bounds on scheduling algorithm for heterogeneous computing systems[J]. SL Proc IFIP, 1974: 349-353.
- [2] CONZALEX T, IBARRA O H, SHAHNI S. Bounds for LPT schedules on UNIFORM processors[J]. SIAM J Comput, 1977, 6(1): 155-166.
- [3] 秦成林, 丁伟. 具有通用机的两组工件的 $Q // C_{\max}$ 问题[J]. 上海大学学报(自然科学版), 1995, 6(1): 18-25.
- [4] 秦成林, 潘家定. 具有两台专用机、两台通用机的 $Q_4 // C_{\max}$ 问题的近似算法[J]. 运筹学学报, 1998, 2(1): 64-70.
- [5] 秦成林, 武俊奇. 具有 m 台通用机的 $P // C_{\max}$ 问题的两种算法[J]. 应用数学与计算数学学报, 1995, 9(1): 39-45.
- [6] MOKOTOFF E. An exact algorithm for the identical parallel machine scheduling problem[J]. European J Oper Res, 2004, 152(3): 758-769.
- [7] 秦成林, 唐黎平. 有资源约束的 $Q/res/C_{\max}$ 问题的改进型算法[J]. 运筹学学报, 1997, 1(2): 69-75.
- [8] SEVASTIANOV S V. Geometrical heuristics for multiprocessor flowshop scheduling with uniform machines at each stage[J]. J Sched, 2002, 5(3): 205-225.
- [9] SCHUSTER C J, FRAMINAN J M. Approximative procedures for no-wait job shop scheduling[J]. Oper Res Lett, 2003, 31(4): 308-318.

Scheduling Problem on General Purpose Machinery and Two Groups Tasks with Uniform Processors

DING Wei

(Department of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The $C_{\max}$ problem on groups of jobs with m general purpose machines at the same speed machinery and two special purpose machines at different speed is discussed. An improved LPT algorithm and the accurate bound of the worst case performance are given.

Key words: sequencing; heuristic approach; performance indexes; many groups of jobs; general purpose and special-purpose machinery