

一类可分解的有限群^{*}

刘晓蕾¹, 王燕鸣^{1,2}

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;

2. 中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 可以分解为 2 个子群乘积的有限群是有限群研究的重要课题, 有不少作者进行了这方面的研究, 也得到了重要的结论和应用。目的是继续这方面的研究。通过对某些已有结果及采用的方法的分析, 借助于推广了的引理, 证明了这些结论在足够弱的条件下仍然成立。特别地, 给出了一个可以分解为 2 个子群乘积的有限群的 2-幂零性、可解性、超可解性等新的判别条件, 改进了某些相关结果。

关键词: 有限群; 可解群; 超可解群

中图分类号: O152 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 05-0013-0003

本文讨论的群均为有限群。 π 表素数集, $O_\pi(G)$ 表 G 的最大正规 π -子群, S_n 表示 n 级对称群。

关于可分解的有限群, 即可表为 2 个子群乘积的有限群, 有许多重要的结果^[1-5]。

其中最著名的如 Wielandt 定理: 2 个幂零群之积 如果是一个子群, 则该子群必可解。本文对可分解群做了进一步的研究, 得出了有限群的 2-幂零性、可解性、超可解性等新的判别条件, 也改进了某些已知结果。

1 两个引理

引理 1 设 G_1, G_2 是群 G 的 2 个子群, 使得 $G = G_1 G_2$ 。如果 H_1, H_2 分别是 G_1, G_2 的 Hall π -子群, 且 $H_1 H_2$ 是 G 的子群, 则 $H_1 H_2$ 是 G 的 Hall π -子群而 $H_1 \cap H_2$ 是 $G_1 \cap G_2$ 的 Hall π -子群。

证明 只需证明 $|G: H_1 H_2|$ 是 π' -数。

一方面有

$$\begin{aligned} |G: H_1 H_2| &= \frac{|G|}{|H_1 H_2|} = \frac{|G_1 G_2|}{|H_1 H_2|} = \\ &= \frac{\left(\frac{|G_1|}{|G_1 \cap G_2|} \right) \left(\frac{|G_2|}{|H_1 \cap H_2|} \right)}{\frac{|G_1: H_1|}{|(G_1 \cap G_2): (H_1 \cap H_2)|} \frac{|G_2: H_2|}{|H_1 \cap H_2|}} = \end{aligned}$$

根据假设, $|G: H_1|$ 和 $|G: H_2|$ 是 π' -数。另一方面, 因为

$$H_1 \cap H_2 \leq G_1 \cap G_2,$$

$$|(G_1 \cap G_2): (H_1 \cap H_2)|$$

是一个整数, 因而 $|G: H_1 H_2|$ 是 π' -数。

引理 2 若 G 的 Sylow 子群均循环, 则 G 超可解。

证明 由 [6, V, 6.2 定理] 及 [8, VI, 10.1] 即得。

2 定理及证明

定理 1 设 C, D 是群 G 的 2 个子群, 使得 $G = CD$ 。假定 G 的 Sylow 2-子群是交换的。如果 C 的 Sylow 2-子群循环, 且 4 不整除 D 的阶, 那么 G 是 2-幂零的。特别地, G 是可解的。

证明 假设定理不真, 而 G 是一个极小反例。设 $D_2 \in \text{Syl}_2(D)$, 那么由假设, $|D_2| = 1$ 或 2。如果 $|D_2| = 1$, 那么 C 的 Sylow 2-子群是 G 的 Sylow 2-子群, 因而 G 有循环的子群。

据 Burnside 定理, 易知 G 是 2-幂零的, 矛盾。因此 $|D_2| = 2$ 。 G 当然不是 2-群。

假设 G 有一个指数为 2 的子群 M , 当然 M 正规于 G 。

若 D_2 不含于 M , 那么 $G = MD_2$ 。因为 G 的 Sylow 2-子群交换且有一个循环极大子群, 故 $M_2 \in \text{Syl}_2(M)$ 循环, 而据 Burnside 定理, M 是 2-幂零的。

* 收稿日期: 2003-11-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271119); 教育部博士点基金资助项目 (20010558018); 广东省自然科学基金资助项目 (021763); 中山大学高等学术中心 (香港) 资助项目 (03M07)

作者简介: 刘晓蕾 (1963 年生), 男, 博士生, 山西财经大学数学系讲师;

通讯联系人: 王燕鸣; E-mail: stswym@zsu.edu.cn

因 $|G/M| \equiv 2, O_2'(M) = O_2'(G)$ 是 G 的 Hall $2'$ -子群, 这意味着 G 是 2-幂零的, 矛盾。因此, $D_2 \leq M$ 而 $|D|(D \cap M)|$ 奇数。

若 D 不含于 M , 则 $G = MD$ 。但 $G/M = MD/M \cong D/(D \cap M)$ 且 $|G/M| \equiv 2$, 与上述矛盾。

假定 $M \geq D$, 则有 $M = M \cap G = M \cap CD = D(M \cap C)$ 。

M 显然满足定理假设。根据 G 的极小性, 易知 M 是 2-幂零的, 因而同上面一样, 知 G 也是 2-幂零的, 矛盾。

现在设 G 没有指数为 2 的子群。设 $C_2 \in \text{Syl}_2(C)$ 。 C_2 显然是 G 的一个 Sylow 2-子群的极大子群。 $D_2 = \langle d \rangle$ 。

则据[4, p. 127], d 共轭于 C_2 的一个元素。不失一般性, 可设 $D_2 \leq C_2$ 。由引理 1, $C_2 = C_2 D_2$ 是 G 的 Sylow 2-子群。这意味着 G 有循环的 Sylow 2-子群, 因而是 2-幂零的, 矛盾。

定理 2 设 M 是 G 的具有素数指数的子群。如果 M 的所有 Sylow 子群均循环, 那么 G 是超可解的。

证明 假设定理不真, 而 G 是个极小反例。

假设 $|G:M| \equiv p$ 。则 $G = MP$, 这里 $P \in \text{Syl}_p(G)$ 。若 $M_G > 1$, 选 N 为 G 的含于 M_G 的极小正规子群。因 M 的 Sylow 子群均循环, $|N|$ 必是素数。注意到 G/N 满足假设, 由 G 的极小性, G/N 超可解, 因而 G 也超可解, 矛盾。于是 $M_G = 1$ 。

现考察 G 在 M 的右陪集上的自然作用。那末 $G \cong G/M_G \leq S_p$ 。这表明 p^2 不整除 $|G|$ 。因而 M 是 p' -群, $|P| \equiv p$, 且 G 的 Sylow p -子群均循环。据引理 2, 这意味着 G 超可解, 矛盾。

注记 本定理改进了[5, 第 IX 章, 引理 4.8]。

定理 3 设 C, D 是群 G 的 2 个阶无平方因子的子群, 使得 $G = CD$ 。那么 G 有 Sylow 塔性质。

证明 假设定理不真, 而 G 是个极小反例。假设显然商群保持。因 Sylow 塔群形成一个饱和群系[8, VI, 7.6], 故 G 有惟一极小正规子群 N , 且 $\Phi(G) = 1$ 。

由定理 1, G 可解, 因此 $C_G(N) = N$ 。根据假设, $|N| \equiv p$, 或 p^2 , 其中 $p \in \pi(G)$ 。

令 $q = \max \pi(G)$ 。据[9, 第五章, 引理 4.1], $p < q$ 。因 $G/N = N_G(N)/C_G(N)$ 同构于 $\text{Aut}(N)$ 的一个子群, 故 $|G/N| \mid |\text{Aut}(N)|$, 因而 $q \mid |\text{Aut}(N)|$ 。

如果 $|N| \equiv p$, 那么 $q \mid |\text{Aut}(N)| \equiv p-1$, 矛盾于 $p < q$ 。进一步, $C_G = D_G = 1$ 。

假设 $|N| \equiv p^2$, 那么 $|G_q| \mid |\text{Aut}(N)| \equiv p(p$

$-1)^2(p+1)$, 这里 $G_q \in \text{Syl}_q(G)$ 。因而 $|G_q| \mid (p+1)$ 。这表明 $q = 3, p = 2$ 而 $|G| \equiv 12$ 。于是 C 或 D 是 6 阶的。这样 $C \trianglelefteq G$ 或 $D \trianglelefteq G$, 矛盾。

注记 本定理改进了[5, 第 IX 章, 引理 4.7]。

定理 4 设 M 是 G 的指数为素数或素数平方的子群。假定 M 的 Sylow 2-子群循环。如果 G 中有一个交换子群 A 使得 $G = MA$, 那么 G 可解。

证明 假设定理不真, 而 G 是个极小反例。

由 Burnside 定理易知, M 是 2-幂零的。再由 Feit Thompson 的奇阶定理, M 可解。若 $M_G > 1$, 考察 G/M_G 。由 G 的极小性, G/M_G 可解, 因而 G 也可解, 矛盾。故 $M_G = 1$ 。

因 A 交换, 故 $M \cap A$ 被 A 正规化。设 $M \cap A > 1$ 。那末

$$1 < M \cap A \leq (M \cap A)^G = (M \cap A)^{AM} = (M \cap A)^M \leq M_G$$

矛盾。于是 $M \cap A = 1$ 而 $|G:M| \equiv |A|$ 。这样, 由假设, $|A|$ 是一个素数或素数的平方。若 A 不是 2-群, 那么 M 的 Sylow 2-子群是 G 的 Sylow 2-子群, 因而循环。但这意味着 G 可解, 矛盾。故 $|A|$ 等于 2 或 4。现考察 G 在 M 的由陪集上的自然作用。则 $G \cong G/M_G$ 同构于 S_4 的一个子群, 从而可解, 又一个矛盾。

注记 本定理也改进了[5, 第 IX 章, 引理 4.8]。

定理 5 设 M 是可解群 G 的极大子群, 而 G 没有同态象与 S_4 同构。如果 M 的 Sylow 子群均循环, 且存在一个循环子群 A , 使得 $G = MA$, 则 G 超可解。

证明 假设定理不真, 而 G 是个极小反例。因超可解群形成饱和群系, G 有惟一极小正规子群 N 。因 G 可解, N 为素数幂阶的初等交换群。

令 $|N| \equiv p^n$ 。当然有 $n > 1$ 。若 $M_G > 1$, 则 $N \leq M_G$ 。但 M 的 Sylow 循环, 必有 $n = 1$, 矛盾。

设 $M_G = 1$ 。则 $G = MN$ 且 $M \cap N = 1$, $|N| \equiv |G:M|$ 。

另一方面, 若 $M \cap A > 1$, 那末

$$1 < M \cap A \leq (M \cap A)^G = (M \cap A)^{AM} = (M \cap A)^M \leq M_G$$

矛盾。于是 $M \cap A = 1$ 。这样 $|A| \equiv |G:M| \equiv |N|$, 从而 A 是一个循环 p -子群。

取 $M_p \in \text{Syl}_p(M)$ 满足 $M_p A \in \text{Syl}_p(G)$ 。因 N 是 G 的一个正规 p -子群, $N \leq M_p A$ 。但由引理 1, $M_p N \in \text{Syl}_p(G)$ 。因此有 $M_p N = M_p A$ 。据[7, 3.2], 若 $p > 2$, 则 $|N| \equiv p$; 若 $p = 2$, 则 $|N| \leq 4$ 。若 $|N|$

$= p$, 由 G 的极小性, G/N 超可解, 因而 G 超可解, 矛盾。

假设 $|N| = 4$, 现考察 G 在 M 的右陪集上的自然作用。则 $G \cong G/M_G$ 同构于 S_4 的一个子群。但 S_4 没有满足假设的真子群。若 $G \cong S_4$, 又矛盾于假设。因此定理为真。

参考文献:

[1] ITO N. Uber das Produkt von zwei abelschen Gruppen[J] . Math Z, 1955, 62: 400—401.
[2] WIELANDT H. Uber das Produkt von paarweise vertauschbaren nilpotenten Gruppen[J] . Math Z, 1951, 55: 1—7.
[3] WIELANDT H. Uber Produkt von nilpotenten Gruppen[J] .

Illinois J Math, 1958, 2: 611—618.
[4] SUZUKI M. Group theory II [M] . New York: Springer-Verlag, 1986.
[5] 徐明曜, 黄建华, 李慧陵, 等. 有限群导引(下册)[M] . 北京: 科学出版社, 1999.
[6] 徐明曜. 有限群导引(上)[M] . 第 2 版. 北京: 科学出版社, 1999.
[7] BEIDLEMAN J C, ROBINSON D J S. On finite groups satisfying the permutizer condition[J] . J Algebra, 1997, 191: 686—703.
[8] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M] . Berlin, New York: Springer-Verlag, 1967.
[9] 张远达. 幂零与可解之间[M] . 武汉: 武汉大学出版社, 1988.

On Factoried Finite Groups

LIU Xiao lei¹, WANG Yan ming^{1,2}

(1. Department of Mathemiths, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Lingnan College, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Factorized finite groups are extensively investigated by many authors and many results are obtained. Our aim is to continue the investigation. With the help of a lemma improved and other methods, new criteria for a finite group to be 2 nilpotent, soluble or supersoluble are obtained. Some known results are generalized.
Key words: finite group; soluble group; supersoluble group