

# 一个 SAT 问题有解的充要条件<sup>\*</sup>

余丰人, 丘海明

(中山大学电子与通信工程系, 广东 广州 510275)

**摘要:** 合取范式可满足性问题(简称 SAT 问题)是一个 NP 完全问题。引入了一个饱和合取范式的概念, 利用饱和合取范式的性质, 对 SAT 问题的本质进行了研究。在此基础上, 证明了一个 SAT 问题有解的充要条件, 它为 SAT 问题完全算法和非完全快速算法的深入研究提供了一条新的思路。

**关键词:** 合取范式; SAT 问题; NP 完全问题

**中图分类号:** TP 30 1 **文献标识码:** A1 **文章编号:** 0529-6579 (2004) 02-0037-03

NP 完全问题是当代计算机科学中的核心问题之一, 现已证明大量重要的计算机科学的理论和应用问题都归结为求解 NP 完全问题, 但到目前为止, 这一问题还没有得到有效解决。经过近几十年来的研究, 人们普遍认为 NP 完全问题的研究可以通过对某一特殊的 NP 完全问题作深入具体的研究来进行<sup>[1]</sup>。合取范式的可满足性问题(SAT 问题)是一典型的 NP 完全问题, 对这一典型问题进行深入的理论分析有助于 NP 完全问题研究的向前发展。SAT 问题的研究有完全算法<sup>[2]</sup>和不完全快速算法<sup>[3]</sup>两个方面。不管是哪个方面的研究, 最重要的是要对 SAT 问题的本质有足够的认识。本文将对 SAT 问题的某些本质特征进行深入的分析与研究, 并给出一个 SAT 问题有解的充要条件, 它集中反映了 SAT 问题某些本质特征, 希望它能为 SAT 问题的完全算法和不完全快速算法研究的发展有所促进。

## 1 合取范式可满足性分析

**定义 1** 布尔变量集  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  上的  $k$  元子句  $c$  定义为

$$c = \left( x_{i_1}^{\neg p_{i_1}} + x_{i_2}^{\neg p_{i_2}} + \dots + x_{i_k}^{\neg p_{i_k}} \right) \quad (1)$$

其中  $i \in (1, 2, \dots, n)$ ;  $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k$ ;  $1 \leq k \leq n$ ;  $p_i \in (0, 1)$ ;  $x_i^1 = x_i$ ,  $x_i^0 = \bar{x}_i$ , 即  $x_i^1$  和  $x_i^0$  是布尔变量  $x_i$  的文字。特别定义 0 和 1 为 0 元子句。

**定义 2** 布尔变量集  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  上的合取范式  $f$  定义为

$$f = \prod_i c_i \quad (2)$$

其中  $c_i$  是  $X_n$  上的子句, 且  $c_i$  在  $f$  中是惟一的。特别

当  $f$  中存在 0 元子句 0 时, 称  $f$  显为零。

**定义 3** 如果存在  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$  使合取范式  $f$  为真, 称合取范式  $f$  是可满足的。 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$  称为合取范式  $f$  的解。

**定理 1** 使子句 (1) 为真的充要条件是  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ 。定理由关系  $p^{\neg p} = 0$  和  $(1-p)^{\neg p}$  可以得到证明。

**定理 2**  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$  为合取范式  $f$  解的充要条件是在合取范式  $f$  中不存在任何的

$$\left( x_{i_1}^{\neg p_{i_1}} + x_{i_2}^{\neg p_{i_2}} + \dots + x_{i_k}^{\neg p_{i_k}} \right)$$

字句, 其中  $i \in (1, 2, \dots, n)$ ,  $1 \leq k \leq n$ 。定理由定理 1 可以得到证明。

**定义 4** 如果  $X_n$  上的子句  $c_1$  和  $c_2$  满足条件

$$c_1 = (c'_1 + x_i^{\neg p_i}), \quad c_2 = (c'_2 + x_i^{p_i})$$

其中  $c'_1$  和  $c'_2$  是  $X_n \setminus \{x_i\}$  上的子句;  $i \in (1, 2, \dots, n)$ , 称  $c_1$  和  $c_2$  是  $X_n$  上的子句对。 $X_n \setminus \{x_i\}$  上的子句  $c'_1$  和  $c'_2$  的或  $(c'_1 + c'_2)$  经过布尔运算使之成为  $X_n \setminus \{x_i\}$  上的子句  $c_3$ , 称  $c_3$  为  $c_1$  和  $c_2$  子句对的生成子句。

**定义 5** 如果合取范式  $f$  中的任何子句对的生成子句都在  $f$  中存在, 称  $f$  为饱和合取范式, 记作  $f_g$ 。

**定理 3** 布尔变量集  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  上的饱和合取范式  $f_g$  可满足的充要条件是饱和合取范式  $f_g$  不显为零。

**证明** 必要性是显然的, 如果  $f_g$  显为零, 则  $f_g$

\* 收稿日期: 2003-07-04

基金项目: 广东省自然科学基金重点项目资助 (021753)

作者简介: 余丰人 (1959 年生), 男, 讲师; E-mail: jssyfr@163.com

$\equiv 0$ , 自然  $f_g$  是不可满足的。下面用数学归纳法证明定理的充分性。

(1) 当布尔变量数为  $n = 1$  时, 不显为零的饱和合取范式只有  $f_g = 1, f_g = x_1^1$  和  $f_g = x_1^0$ 。当  $f_g = 1$  时,  $f_g$  有解  $x_1 = 1$  和  $0$ ; 当  $f_g = x_1^1$  时,  $f_g$  有解  $x_1 = 1$ ; 当  $f_g = x_1^0$  时,  $f_g$  有解  $x_1 = 0$ 。所以当布尔变量数为  $n = 1$  时, 命题成立。

(2) 假设当布尔变量数为  $n = s$  时命题成立。即布尔变量集  $X_s = (x_1, x_2, \dots, x_s)$  上的饱和合取范式  $f_g$  不显为零时, 饱和合取范式  $f_g$  可满足。

(3) 当布尔变量数为  $n = s + 1$  时, 将布尔变量集  $X_{s+1} = (x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1})$  上的饱和合取范式  $f_g$  表示为

$$f_g = f'_g \circ f''_g$$

其中,  $f_g$  是由  $f_g$  中所有不含变量  $x_{s+1}$  的子句组成, 而  $f''_g$  是由  $f_g$  中所有含变量  $x_{s+1}$  的子句组成。

由于  $f_g$  是饱和合取范式, 所以  $f_g$  所有子句对的生成子句在  $f_g$  中都存在, 而不含变量  $x_{s+1}$  的子句对的生成子句一定不含变量  $x_{s+1}$ , 所以  $f'_g$  的所有子句对的生成子句在  $f'_g$  中都存在, 即  $f'_g$  是饱和合取范式。由于  $f_g$  不显为零, 所以  $f'_g$  也不显为零, 即  $f'_g$  是不显为零的布尔变量集  $X_s = (x_1, x_2, \dots, x_s)$  上的饱和合取范式。根据归纳假设,  $f'_g$  是可满足的。

设  $f'_g$  有解  $(x_1, x_2, \dots, x_s) = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ , 根据定理 2, 在饱和合取范式  $f'_g$  中不存在任何  $(x_{i1}^{1-p_{i1}} + x_{i2}^{1-p_{i2}} + \dots + x_{ir}^{1-p_{ir}})$  的子句, 其中  $i \in (1, 2, \dots, s)$  和  $1 \leq r \leq s$ 。

$f''_g$  是由  $f_g$  中所有含变量  $x_{s+1}$  的子句组成, 也就是在  $f''_g$  中的子句具有如下的形式:

$$(x_{i1}^{1-p'_{i1}} + x_{i2}^{1-p'_{i2}} + \dots + x_{ir}^{1-p'_{ir}} + x_{s+1}^{1-p'_{s+1}})$$

其中  $i \in (1, 2, \dots, s), 1 \leq r' \leq s, p' \in (0, 1)$ 。因此可以将  $f''_g$  中的子句划分为如下 4 类:

- ① 第一类为  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_s, p'_{s+1}) \neq (p_1, p_2, \dots, p_s, 0)$  的子句  $(x_{i1}^{1-p'_{i1}} + x_{i2}^{1-p'_{i2}} + \dots + x_{ir}^{1-p'_{ir}} + x_{s+1}^1)$
- ② 第二类为  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_s, p'_{s+1}) \neq (p_1, p_2, \dots, p_s, 1)$  的子句  $(x_{i1}^{1-p'_{i1}} + x_{i2}^{1-p'_{i2}} + \dots + x_{ir}^{1-p'_{ir}} + x_{s+1}^0)$
- ③ 第三类为  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_s, p'_{s+1}) = (p_1, p_2, \dots, p_s, 0)$  的子句  $(x_{i1}^{1-p'_{i1}} + x_{i2}^{1-p'_{i2}} + \dots + x_{ir}^{1-p'_{ir}} + x_{s+1}^1)$
- ④ 第四类为  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_s, p'_{s+1}) = (p_1, p_2, \dots, p_s, 1)$  的子句  $(x_{i1}^{1-p'_{i1}} + x_{i2}^{1-p'_{i2}} + \dots + x_{ir}^{1-p'_{ir}} + x_{s+1}^0)$

分析第一和第二类子句, 由于至少有一个  $p'_i \neq p_i (i \neq s + 1)$ , 因此对于

在子句中至少有一个文字

$$x_i^{1-p'_i} = p_i^{1-p'_i} =$$

$$\begin{cases} 1^1 & p_i = 1, p'_i = 0 \\ 0^0 & p_i = 0, p'_i = 1 \end{cases} = 1 \quad i \neq s + 1$$

所以第一和第二类子句对于

$$(x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}) = (p_1, p_2, \dots, p_s, p_{s+1})$$

不管  $p_{s+1} = 0$  还是  $p_{s+1} = 1$  都是可满足的

对于第三类子句, 由于在子句中, 当  $x_{s+1} = 1$  时, 文字  $x_{s+1}^1 = 1^1 = 1$ , 所以对于

$$(x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}) = (p_1, p_2, \dots, p_s, 1)$$

这些子句是可满足的。

对于第四类子句, 由于在子句中, 当  $x_{s+1} = 0$  时, 文字  $x_{s+1}^0 = 0^0 = 1$ , 所以对于

$$(x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}) = (p_1, p_2, \dots, p_s, 0)$$

这些子句是可满足的。

因此对于

$$(x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}) = (p_1, p_2, \dots, p_s, p_{s+1})$$

$f''_g$  中的第一类和第二类子句总是可满足的, 不管  $p_{s+1} = 0$  还是  $p_{s+1} = 1$ 。 $f''_g$  中的第三类子句要被满足, 则要求  $p_{s+1} = 1$ , 而  $f''_g$  中的第四类子句要被满足, 则要求  $p_{s+1} = 0$ 。可以看出,  $f''_g$  中的第一类和第二类子句不管存在与否都不影响  $f''_g$  的可满足性。当  $f''_g$  中不存在第三类子句时, 取  $p_{s+1} = 1, f''_g$  是可满足的。当  $f''_g$  中不存在第四类子句时, 取  $p_{s+1} = 1, f''_g$  是可满足的。当  $f''_g$  中既存在第三类子句, 又存在第四类子句时, 不管  $p_{s+1}$  取什么值,  $f''_g$  都是不可满足的, 但这种情况是不存在的, 证明如下。

当  $f''_g$  中既存在第三类子句又存在第四类子句时, 因为第三类子句中的任何一个子句与第四类子句中的任何一个子句构成一子句对, 不失一般性, 假设在  $f''_g$  中存在以下两个子句。

$$\begin{matrix} \text{第三类子句} & (x_{i1}^{1-p_{i1}} + x_{i2}^{1-p_{i2}} + \dots + x_{ir}^{1-p_{ir}} + x_{s+1}^1) \\ \text{第四类子句} & (x_{i1}^{1-p_{i1}} + x_{i2}^{1-p_{i2}} + \dots + x_{ir}^{1-p_{ir}} + x_{s+1}^0) \end{matrix}$$

是一子句对。由于这一子句对也是  $f_g$  的子句对。而  $f_g$  是饱和合取范式, 因此该子句对的生成子句在  $f_g$  中一定存在。但是, 这一子句对的生成子句为

$$(x_{j1}^{1-p_{j1}} + x_{j2}^{1-p_{j2}} + \dots + x_{jr}^{1-p_{jr}})$$

其中  $j \in (1, 2, \dots, s), 0 \leq r \leq s$ , 它是不含文  $x_{s+1}$  字的子句, 它一定存在于  $f'_g$  中, 根据定理 2,

$$(x_1, x_2, \dots, x_s) = (p_1, p_2, \dots, p_s)$$

不被  $f'_g$  满足, 这与归纳假设矛盾, 所以  $f''_g$  中同时存在第三类子句和第四类子句的情况是不存在的。

综合上述分析, 对于

$$(x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}) = (p_1, p_2, \dots, p_s, p_{s+1}),$$

存在一个  $p_{s+1} \in (0, 1)$ , 使  $f''_g$  可满足。由于  $f'_g$  是不含  $x_{s+1}$  文字的子句构成的, 根据假设, 不管  $p_{s+1}$  取什么值, 它都能使  $f'_g$  可满足。所以  $f_g = f'_g \circ f''_g$  是可满足的, 命题成立。

### 3 合取范式可满足的充要条件

**定理4** 对于  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  上的任一合取范式  $f$ , 存在  $X_n$  上的饱和合取范式  $f_g$  与  $f$  恒等, 并称  $f_g$  为  $f$  的饱和合取范式。

**证明** 首先定义一合取范式的迭代变换  $L$  为:

(1) 在第  $k$  代合取范式  $f^{(k)}$  中取出所有子句对, 并求出这些子句对的生成子句;

(2) 将所有在  $f^{(k)}$  中不存在的生成子句与  $f^{(k)}$  相与构造第  $k+1$  代合取范式  $f^{(k+1)}$ , 既迭代方程为  $f^{(k+1)} = Lf^{(k)}$ 。当  $f^{(k+1)}$  的子句与  $f^{(k)}$  完全相同时, 不难看出  $f^{(k)}$  就是饱和合取范式。设  $f^{(k)}$  的子句对  $c_1$  和  $c_2$  的生成子句为  $c$ , 由子句对和子句对的生成子句定义以及布尔恒等变换有

$$c_1 c_2 \equiv (c'_1 + x_i^{1-p_i})(c'_1 + x_i^{1-p_i}) \equiv$$

$$(c'_1 + x_i^{1-p_i})(c'_1 + x_i^{1-p_i})(c'_1 + c'_1) \equiv c_1 c_2 c$$

因此不难看出  $f^{(k+1)}$  恒等于  $f^{(k)}$ , 即迭代变换  $L$  是恒等变换。另外如果  $f^{(k)}$  不是饱和合取范式, 则  $f^{(k+1)}$  的子句数至少比  $f^{(k)}$  的子句数多一个, 所以迭代变换  $L$  过程是子句数不断增加的过程。由于布尔变量集  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  上的子句总数为  $3^n + 1$  是个有限数, 所以布尔变量集  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  上的任何合取范式  $f$  经过某  $m$  有限次  $L$  迭代变换一定会饱和。即存在  $m$  使  $f^{(m)} = L^{(m)} f^{(m)}$ 。令  $f_g = f^{(m)}$ , 则  $f_g$  是一饱和合取范式, 由于迭代变换  $L$  是恒等变换, 所以有  $f_g = f$ , 即命题成立。

**定理5** 布尔变量集  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  上的合取范式  $f$  可满足的充要条件是  $f$  的饱和合取范式

$f_g$  不显为零。

**证明** 根据定理3, 合取范式  $f$  存在恒等于  $f$  的饱和合取范式  $f_g$ , 而根据定理4,  $f_g$  可满足的充要条件是  $f_g$  不显为零, 所以  $f$  可满足的充要条件是  $f$  的饱和合取范式  $f_g$  不显为零命题成立。

### 4 结论和讨论

合取范式可满足性问题的解决, 第一是要寻找一个能反映问题本质的判定准则, 第二是要寻找一个有效的判定方法。定理5提出了一个能很好反映合取范式可满足性问题本质的判定准则, 而定理4指出了合取范式可满足性问题的判定方法, 即对合取范式可满足性问题的判定, 就是求合取范式的饱和合取范式的问题。定理4还提出了一种求合取范式的饱和合取范式的方法, 但定理4是一个合取范式的饱和合取范式存在定理, 它并没有限定求合取范式的饱和合取范式只有一种方法, 而是为合取范式可满足性问题的判定指明了一个方向。可以说合取范式可满足性问题的复杂性, 也就是求合取范式的饱和合取范式的复杂性, 这也为合取范式可满足性问题复杂性的分析提供了一条新的思路。由定理4和定理5不难看出, 有很大一部分合取范式可满足性问题的复杂性可断定是多项式的, 限于篇幅, 有关时间和空间复杂性的问题另文再分析。

#### 参考文献:

- [1] DUNHAM B, WANG H. Towards feasible solutions of the tautology problem[J]. Annals of Mathematical Logic, 1976 (10): 117—154.
- [2] 吴向军, 余丰人. 二元可满足性问题有解的充要条件[J]. 软件学报, 1996, 7(1): 51—58.
- [3] 李未, 黄文奇. 一种求解合取范式可满足性问题的数学物理方法[J]. 中国科学(A辑), 1994, 24(11): 1208—1217.

## A Sufficient and Necessary Condition for Sat Problem

YU Feng ren, QIU Hai ming

(Department of Electronics and Communication Engineering, Sun Yat-sen University Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** The satisfiability problem of conjunction normal form (abbreviate SAT problem) is an NP complete problem. An new concept of saturated conjunctive normal form is introduced and the nature of SAT problem is studied for utilizing the characteristic of saturated conjunctive normal form. Based on the sufficient and necessary condition for SAT problem, a new idea is provided for further study of the complete algorithm and non complete fast algorithm of SAT problem.

**Key words:** conjunction normal form; SAT problem; NP complete problem