

一类非线性捕食—被捕食反应扩散系统^{*}

莫嘉琪¹, 王莉婕¹, 林万涛²

(1. 湖州师范学院, 浙江 湖州 313000;
2. 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

摘要: 研究了一类具有非线性捕食—被捕食反应扩散系统奇摄动问题。在适当的条件下, 利用微分不等式理论, 讨论了问题解的渐近性态。

关键词: 非线性; 捕食—被捕食; 反应扩散; 奇摄动

中图分类号: O175.29 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 04-0113-02

非线性奇摄动问题是国际上应用数学界十分活跃的研究对象^[1,2]。近10年来许多学者作了大量的工作^[2-4]。本文将利用一个特殊的方法来研究生物数学中的一类反应扩散系统。

现讨论如下非线性捕食—被捕食系统^[5]:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} - Lu_1 &= u_1 f_1(\lambda_1 - r_{11} u_1 - r_{12} u_2), \\ (t, x) &\in (0, T] \times \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial t} - Lu_2 &= u_2 f_2(-\lambda_2 + r_{21} u_1), \\ (t, x) &\in (0, T] \times \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

$$u_i = g_i(x), x \in \partial\Omega, i = 1, 2 \quad (3)$$

$$u_i = h_i(x), t = 0, i = 1, 2 \quad (4)$$

其中, ϵ 为小参数, 它意味着是大扩散系数的情形, u_1 和 u_2 分别表示被捕食和捕食者数, λ_i, r_{ij} 为正常数, λ_1 为被捕食者的实际增长率, λ_2 为捕食者的死亡率, r_{ij} 分别为被捕食者和捕食者的密度系数, 方程(1), (2)的右端为反应项, 它描述被捕食和捕食的数理生态系统, 问题(1) — (4)的捕食—被捕食系统是一类扩散的种群相互的增长关系, L 为一致椭圆型算子, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω 表示在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界凸域, $\partial\Omega$ 为 Ω 的光滑边界, 它为 $C^{1+\alpha}$ 类 ($\alpha \in (0, 1)$ 为 Hölder 指数)。本文将构造问题解的渐近展开式并讨论其渐近性态。假设:

(1) L 的系数, $g_i > 0$ 和 $h_i > 0$ 为关于其变量在相应的变化区域内为 Hölder 连续的, 且在 $x \in \Omega$ 上 $g_i(x) = h_i(x), i = 1, 2$ 。

(2) $f_i(y)$ 为连续可微, 且存在常数 k_1 和 k_2 , 使得 $f_{1y}(y) \geq k_1 > 0, f_{2y}(-\lambda_2) \leq k_2 < 0$ 。

现在来构造问题(1) — (4)解的形式渐近展开

式。由于退化问题为

$$-Lu_1 = u_1 f_1(\lambda_1 - r_{11} u_1 - r_{12} u_2), x \in \Omega \quad (5)$$

$$-Lu_2 = u_2 f_2(-\lambda_2 + r_{21} u_1), x \in \Omega \quad (6)$$

$$u_i = g_i(x), x \in \partial\Omega, i = 1, 2 \quad (7)$$

再设问题(5) — (7)的一个正解 (U_1, U_2) 。但是 (U_1, U_2) 未必满足初始条件(4), 为此需构造初始层校正项 (V_1, V_2) 。引入伸长变量^[1]: $\tau = t/\epsilon$ 。

考虑抛物型系统初始边值问题:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tau} - LV_1 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \tau} - LV_2 = 0 \quad (10)$$

$$V_i(\tau, x) = 0, x \in \partial\Omega, i = 1, 2 \quad (11)$$

$$V_i(0, x) = h_i(x) - U_i(x),$$

$$\tau = 0, i = 1, 2 \quad (12)$$

不难看出, 线性问题(9) — (12)存在一个具有初始层性态的正解 (V_1, V_2) 。现在来证明

$$u_i(t, x) = U_i(x) + V_i(t/\epsilon, x) + O(\epsilon),$$

$$0 < \epsilon < 1, i = 1, 2 \quad (13)$$

定理 在假设(1), (2)下, 非线性捕食—被捕食反应扩散系统奇摄动问题(1) — (4)存在一组解 (u_1, u_2) , 并成立一致有效的渐近展开式(13)。

证明 首先构造辅助函数 α_i 和 β_i :

$$\alpha_i = U_i + V_i - \delta\epsilon, i = 1, 2,$$

$$\beta_i = U_i + V_i + \delta\epsilon, i = 1, 2 \quad (14)$$

其中, δ 为足够大的正常数。显然,

$$\begin{aligned} \alpha_i &\leq \beta_i, (t, x) \in [0, T] \times (\Omega + \partial\Omega), \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \quad (15)$$

* 收稿日期: 2003-09-18

基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目 (90211004)

作者简介: 莫嘉琪 (1937年生), 男, 教授, E-mail: mojiaci@mail.ahnu.edu.cn

且在 $x \in \partial\Omega$ 上, 存在正常数 $M_{i1}, i = 1, 2$, 使得

$$\alpha_i|_{x \in \partial\Omega} = [U_i + V_i - \delta\epsilon]_{x \in \partial\Omega} = \\ g_i(x)|_{x \in \partial\Omega} + M_{i1}\epsilon - \delta\epsilon, i = 1, 2$$

于是选取 $\delta \geq M_{i1}$, 我们有

$$\alpha_i|_{x \in \partial\Omega} \leq g_i(x)|_{x \in \partial\Omega}, i = 1, 2 \tag{16}$$

同理可得

$$\beta_i|_{x \in \partial\Omega} \geq g_i(x)|_{x \in \partial\Omega}, i = 1, 2 \tag{17}$$

$$\alpha_i(0, x) \leq h_i(x) \leq \beta_i(0, x), i = 1, 2 \tag{18}$$

现证

$$\epsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - L\alpha_1 - \alpha_1 f_1(\lambda_1 - r_{11}\alpha_1 - r_{12}\alpha_2) \leq 0, \\ i = 1, 2 \tag{19}$$

$$\epsilon \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - L\alpha_2 - \alpha_2 f_2(-\lambda_2 + r_{21}\alpha_1) \leq 0, \\ i = 1, 2 \tag{20}$$

$$\epsilon \frac{\partial \beta_1}{\partial t} - L\beta_1 - \beta_1 f_1(\lambda_1 - r_{11}\beta_1 - r_{12}\beta_2) \geq 0, \\ i = 1, 2 \tag{21}$$

$$\epsilon \frac{\partial \beta_2}{\partial t} - L\beta_2 - \beta_2 f_2(-\lambda_2 + r_{21}\beta_1) \geq 0, \\ i = 1, 2 \tag{22}$$

由中值定理, 存在正常数 M_{12} , 使得

$$\epsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - L\alpha_1 - \alpha_1 f_1(\lambda_1 - r_{11}\alpha_1 - r_{12}\alpha_2) = \\ [-LU_1 - U_1 f_1(\lambda_1 - r_{11}U_1 - r_{12}U_2)] + \\ \left[\frac{\partial V_1}{\partial t} - L(V_1) \right] + [U_1 f_1(\lambda_1 - r_{11}U_1 - r_{12}U_2) - \\ (U_1 + V_1 - \delta\epsilon) f_1(\lambda_1 - r_{11}(U_1 + V_1 - \delta\epsilon) -$$

$$r_{12}(U_2 + V_2 - \delta\epsilon))] \leq \\ -U_1[f_{1y}(\ast)](r_{11}\delta + r_{12}\delta)\epsilon + \\ f_1(\lambda_1 - r_{11}(U_1 + V_1 - \delta\epsilon) - \\ r_{12}(U_2 + V_2 - \delta\epsilon))\delta\epsilon + M_{12}\epsilon$$

其中, “ $\ast$ ” 表示在相应自变量范围内的某值。由假设及选取 δ 足够地大, 可证明不等式 (19)。同理可分别证不等式 (20) – (22)。于是由 (15) – (22), 存在问题 (1) – (4) 的解 (u_1, u_2) 且成立 $\alpha_i(t, x, \epsilon) \leq u_i(t, x, \epsilon) \leq \beta_i(t, x, \epsilon) (i = 1, 2)$ 。再由 (14) 式, 便得到结果 (13)。定理证毕。

参考文献:

- [1] DE JAGER E M, JIANG F. The theory of singular perturbation[M]. Amsterdam: North Holland Publishing Co. 1996.
- [2] KADALBAJOO M K, PATIDAR K C. Singularly perturbed problems in partial differential equations[J]. Appl Math Comput, 2003, 134: 371–429.
- [3] TANIGUCHI M. Instability of planar traveling waves in bistable reaction-diffusion systems[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2003, 3B (1): 21–44.
- [4] DO NASCIMENTO A S. Stable transition layers in a semilinear diffusion equation with spatial inhomogeneities in N-dimensional domains[J]. J Differential Eqns, 2003, 190: 16–38.
- [5] MIMURA M, NISHIURA Y, YAMAGUTI M. Some diffusive prey and predator systems and their bifurcation problems[J]. Ann New York Acad Sci, 1979, 316: 490–510.

A Class of Nonlinear Predator-prey Reaction Diffusion Systems

MO Jia qi¹, WANG Li jie¹, LIN Wan tao²

(1. Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, Zhejiang, China;

2. Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

Abstract: A class of nonlinear predator-prey reaction diffusion systems for singularly perturbed problems are considered. Under suitable conditions, the asymptotic behaviors of solutions for initial boundary value problems are studied using theory of differential inequalities.

Key words: nonlinear; predator-prey; reaction diffusion; singular perturbation