

一类随机环境中的高维随机游动^{*}

柳向东¹, 郭先平²

(1. 暨南大学统计学系, 广东 广州 510632;

2. 中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 对一类随机环境中的高维 ($Z^d, d \geq 2$) 随机游动进行了研究, 得出了该模型常返性的一个必要条件:

$E \log \frac{\omega(x, e_i)}{\omega(x, -e_i)} = 0, i = 1, \dots, d$. 然后在 Kalikow 0-1 律的基础上, 讨论了该模型的更新结构, 得出了一个对于 X_n/n 的大数定律。

关键词: 高维随机游动; 随机环境; 常返性; 大数定律

中图分类号: O211.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 05-0009-04

随机环境中的高维随机游动最先是由 Kalikow^[1] 提出的, 他给出这了模型非常返 $\lim_{n \rightarrow +\infty} l \cdot X \rightarrow +\infty$ 的一个充分条件, 提出了一个 0-1 律, 并且还在文章中提到了环境中的高维随机游动是否具有常返性等几个开问题, 这些问题至今还没有很好解决。在以后关于随机环境中的高维随机游动的研究中, Durrett^[2] 作了比较好的工作, 他对可逆环境中的高维随机游动, $d < \infty$ 的情形提出了一个常返性准则和 $X_n \sim (\log n)^2$ 的极限准则。可惜他的可逆环境, 并不是独立环境。连 Solomon^[3] 提出的大数定律这些极限理论, 在高维情形都没有解决, 因而独立环境中的高维的结果比一维情形^[3-6] 要少得多。本文对随机环境中的高维紧邻随机游动进行了研究, 首先利用比较定理得到该过程常返的一个必要条件, 然后在 Kalikow^[1] 的 0-1 律的基础上, 利用随机过程中的更新理论, 得出了该过程在非常返性的情形下的一个大数定律。

1 常返性的一个必要条件

ω 是 Z^d 上的一个测度, 且 $\omega = \{\omega(x, \cdot), x \in Z^d, \sum_{i=1}^d [\omega(x, e_i) + \omega(x, -e_i)] = 1\}$ 。其中 $0 \leq \omega(x, \pm e_i) \leq 1, |e_i| = 1, i = 1, \dots, d$ 。

定义 1 若 $\{\omega(x, \cdot)\}$ 是 ω 上 i.i.d. 随机矢量, 具有相同的分布 μ , 固定环境 $\omega, (X_n)_{n \geq 0}$ 是 $(Z^d)^N$ 上的马氏链, 其状态空间为 Z^d , 其转移概率为

$$P_{x, \omega}[X_{n+1} = X_n \pm e | X_1, \dots, X_n] = \omega(X_n, \pm e), \\ n \geq 0, e \in Z^d, |e| = 1, P_{x, \omega}[X_0 = x] = 1$$

令 $P = \mu^{\otimes Z^d}$, 则在 $\Omega \times (Z^d)^N, P_x = P \times P_{x, \omega}$ 。

其中, $P_{x, \omega}$ 也通常称为“淬灭概率”(quenched law), P_x 称为“缓冷概率”(annealed law)。

定理 1 对于上述过程 $(X_n)_{n \geq 0}$ 常返的一个必要条件:

$$E \log \frac{\omega(x, e_i)}{\omega(x, -e_i)} = 0, i = 1, \dots, d$$

证明 注意一个比较定理: 若 $\tilde{\alpha}(x, y) \leq \alpha(x, y)$ 对所有的 x, y 成立, 则若 α 常返一定有 $\tilde{\alpha}$ 常返, 若 $\tilde{\alpha}$ 瞬时一定有 α 瞬时。令

$$\tilde{\alpha}(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y) & \text{如果 } y = x \pm e_i \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

显然 $\tilde{\alpha}(x, y)$ 是可以看作一维的随机游动, 可以根据 Key 定理 22 (p531) 有: 若 $E \log \frac{\omega(x, e_i)}{\omega(x, -e_i)} \neq 0$ 时, $\tilde{\alpha}$ 是瞬时的, 由比较定理可得定理 1。

注 该定理可推广到带逗留状态的随机环境中的高维随机游动。

2 更新结构

下面对在某个 l “方向”瞬时的随机环境中的随机游动进行研究。注意几个符号。

$U \in Z^d$, 定义过程 X 离开和进入 U 的时间

$$T_U = \inf\{n \geq 0, X_n \notin U\},$$

$$H_U = \inf\{n \geq 0, X_n \in U\}$$

* 收稿日期: 2003-10-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271120)

作者简介: 柳向东 (1973 年生), 男, 博士, 讲师; E-mail: liuxd@jnu.edu.cn

l 为 Z^d 上的实值线性函数。对 $l \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, 令

$$B_l = \{\lim_n l \cdot X_n = +\infty\} \cup \{\lim_n l \cdot X_n = -\infty\}$$

$$C_l = \{\text{存在一个 } N, \text{ 当 } n \geq N \text{ 时}, l \cdot X_n \text{ 保持相同的符号}\}$$

引理 1 对 $l \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, $P_0(B_l) = 0$ 或 1 。

证明 由 Kalikow^[1] 可知,

$$P_0(C_l) = 0 \text{ 或 } 1$$

令 $M > 0$, 以下证明

$$\{l \cdot X_n \in [0, M], \text{i.o.}\} \subset \{l \cdot X_n < 0, \text{i.o.}\} \quad (1)$$

选择充分大的 N 和常数 $c > 0$, 使得

$$P_{x, \omega}[H_{\{z; l \cdot z \leq 0\} \leq N}] \geq c \text{ 对}$$

$$\omega \in \Omega, x \in \{z; 0 \leq l \cdot z \leq M\}$$

定义一些返回的时间

$$V_0 = 0, V_1 = H_{\{z; 0 \leq l \cdot z \leq M\}} \leq \infty$$

$$V_{k+1} = V_1 \circ \theta_{V_k+N} + V_k + N \leq \infty, k \geq 1$$

对 $k \geq 1$, 定义

$$I_{G_k} = I_{\{V_k < \infty\}},$$

$$I_{H_k} = I_{\{H_{\{z; l \cdot z \leq N\}}\}} \circ \theta_{V_k}$$

显然有 $G_k \in \mathcal{F}_k, H_k \in \mathcal{F}_{k+1}$ 。由强马氏性和 P 积分有 $P_0[H_k | \mathcal{F}_{V_k}] \geq c I_{G_k}, k \geq 1$ 。

根据 Borel-Cantelli 第 2 引理有

$$\sum_{k \geq 1} I_{H_k} = \infty \text{ 在 } \{\sum_{k \geq 1} I_{G_k} = \infty\}$$

这就证明了式 (1)。注意到 $B_l \subset C_l$, 所以若 $P_0(C_l) = 0$, 则 $P_0(B_l) = 0$ 。另一方面若 $P_0(C_l) = 1$, 注意到式 (1) 有

$$P_0[\{l \cdot X_n > 0 \text{ 对充分大的 } n\} \cap$$

$$\{l \cdot X_n \in [0, M], \text{i.o.}\}] = 0$$

同样地对于 $l \cdot X_n$ 为负的情形, 因此

$$P_0[C_l \cap \{l \cdot X_n \in [-M, M], \text{i.o.}\}] = 0$$

因此有 $P_0(B_l) = 1$ 。

本文假定沿 l 过程 X 是瞬时的, 即 $P_0(B_l) = 1$ 。

更进一步假定

$$P_0(A_l) > 0, A_l = \{\lim_n l \cdot X_n = +\infty\} \quad (2)$$

考虑 $(\mathcal{F}_n)$ 停时

$$T_u = \inf\{n \geq 0, l \cdot X_n \geq u, u \in \mathbf{R}\}$$

$$D = \inf\{n \geq 0, l \cdot X_n < l \cdot X_0\}$$

和 3 个停时序列, $\{S_k, k \geq 0\}, \{R_k \geq 1\}, \{M_k, k \geq 0\}$ 。

$$S_0 = 0, M_0 = l \cdot X_0,$$

$$S_1 = T_{M_0+a} \leq \infty, R_1 = D \circ \theta_{S_1} + S_1 \leq \infty,$$

$$M_1 = \sup\{l \cdot X_m, 0 \leq m \leq R_1\} \leq \infty,$$

.....

$$S_{k+1} = T_{M_k+a} \leq \infty,$$

$$R_{k+1} = D \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1} \leq \infty,$$

$$M_{k+1} = \sup\{l \cdot X_m, 0 \leq m \leq R_{k+1}\} \leq \infty$$

于是有

$$0 = S_0 \leq S_1 \leq R_1 \leq S_2 \leq \dots \leq \infty$$

定义

$$K = \inf\{k \geq 1, S_k < \infty, R_k = \infty\} \leq \infty$$

$$\tau_1 = S_K \leq \infty$$

引理 2 假设条件 (1) 成立, 则有

$$P_0(D = \infty) > 0,$$

$$A_l = \{K < \infty\} = \{\tau_1 < \infty\}, P_0 - \text{a.s.}$$

证明 用反证法。假定 $P_0[D = \infty] = 0$ 。则对所有的 $x \in Z^d, P_x(D < \infty) = 1$, 对几乎所有的 ω , 有

$$P_{x, \omega}[D < \infty] = 1$$

运用强马氏性有

$$\lim_n l \cdot X_n \leq 0, P_0 - \text{a.s.}$$

这与条件 (2) 矛盾。

下面来证明第 2 个等式。先证第 1 个部分。注意到

$$\{K < \infty\} \subset \{\lim_n l \cdot X_n = -\infty\}^c$$

由前面假设 $P_0(B_l) = 1$ 。有

$$\{K < \infty\} \subset \{\lim_n l \cdot X_n = +\infty\} = A_l$$

注意到

$$P_0[R_k < \infty] =$$

$$E[E_0, \omega[S_k < \infty, P_{X_{S_k}, \omega}[D < \infty]]] =$$

$$\sum_{x \in Z^d} E\{P_{0, \omega}[S_k < \infty, X_{S_k} = x] P_{x, \omega}[D < \infty]\}$$

由于 $P_0[S_k < \infty, X_{S_k} = x]$ 是 $\sigma(\omega(y, \cdot); l \cdot y < l \cdot x)$ 可测的, 而 $P_{x, \omega}[D < \infty]$ 是 $\sigma(\omega(y, \cdot); l \cdot y > l \cdot x)$ 可测的, 因此它们互相独立。上述的等式等价于

$$\sum_{x \in Z^d} P_0[S_k < \infty, X_{S_k} = x] P_0[D < \infty] =$$

$$P_0[S_k < \infty, X_{S_k} = x] P_0[D < \infty] \leq$$

$$P_0[R_{k-1} < \infty] P_0[D < \infty]$$

由递推可得

$$P_0(R_k < \infty) \leq (P_0(D \leq \infty))^k, k \geq 1$$

因此有

$$\inf\{k \geq 1, R_k = \infty\} < \infty, P_0 - \text{a.s.} \quad (3)$$

另一方面

$$\text{在 } A_l \text{ 上, } R_{k-1} < \infty \text{ 隐含 } S_k < \infty, k \geq 1$$

结合 (3) 式可知

$$\{K < \infty\} \supseteq \{\lim_n l \circ X_n = +\infty\} = A_l$$

故第 1 个等式成立, 类似地可证第 2 个等式。

定义一个 σ -代数。 $\mathcal{G} = \sigma(\tau_1, (X_k \wedge \tau_1)_{k \geq 0},$

$(\omega(y, \cdot))_{l.y < l.\tau_1})$ 。 $\mathcal{G}$ 可以由以下的集合来生成:

$$\{\tau_1 = k\} \cap \{X_{\tau_1} = x\} \cap A$$

其中, $A \in \sigma(\omega(y, \cdot), l.y < l.x) \otimes \mathcal{K}, k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d$ 和 $\{\tau_1 = \infty\} \cap A$, 其中 $A \in \sigma(\omega(y, \cdot), y \in \mathbb{Z}^d) \otimes \mathcal{F}_\infty$ 。定义其上的概率测度 $Q_0(\cdot)$

$$Q_0(\cdot) = P_0(\cdot | \tau_1 < \infty) = P_0(\cdot | A_l)$$

引理 3

$$Q_0[(X_{\tau_1+n} - X_{\tau_1})_{n \geq 0} \in \cdot,$$

$$(\omega(X_{\tau_1} + y, \cdot))_{l.y \geq 0} \in \cdot | \mathcal{G}] =$$

$$P_0[(X_n)_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega(y, \cdot))_{l.y \geq 0} \in \cdot | D = \infty]$$

证明 设 f, g, h 是有界函数, 分别为 $\sigma(X_n, n \geq 0)$, $\sigma(\omega(y, \cdot), l.y \geq 0)$ 和 $\mathcal{G}$ 可测的。 $t_x, x \in \mathbb{Z}^d$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 上的一个推移。则

$$P_0(\tau_1 < \infty) E_0^Q(f(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1}) g \circ t_{X_{\tau_1}} h) =$$

$$\sum_{k \geq 1} E_0[f(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1}) g \circ t_{X_{\tau_1}} h, S_k < \infty, R_k = \infty] =$$

$$\sum_{k \geq 1, x} E_0[f(X_{\tau_1+} - x) g \circ t_x h,$$

$$X_{S_k} = x, S_k < \infty, R_k = \infty]$$

注意到事件 $\{X_{\tau_1} = x\} \circ \{\tau_1 = S_k\}$, 可以找到一个 $\sigma(\omega(y, \cdot), l.y < l.x) \otimes \mathcal{K}_k$ 可测的随机变量 $h_{x,k}$ 使得上式等于

$$\sum_{k \geq 1, x} E\{E_0[\omega[f(X_{\tau_1+} - x) h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < \infty, D \circ \theta_{S_k} = \infty] g \circ t_x\}$$

运用在 S_k 时的强马氏性可得

$$\sum_{k \geq 1, x} E\{E_0[\omega[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < \infty] E_{x,\omega}(f(X_{\cdot} - x), D = \infty) g \circ t_x\}$$

注意到

$$E_{0,\omega}[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < \infty]$$

是 $\sigma(\omega(y, \cdot), l.y < l.x)$ 可测的, 而 $E_{x,\omega}(f(X_{\cdot} - x), D = \infty) g \circ t_x$ 是 $\sigma(\omega(y, \cdot), l.y \geq l.x)$ 可测的。因此它们关于 P 是独立的, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1, x} E_0[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < \infty] E_0(fg, D = \infty) \\ & E_0(fg | D = \infty) \sum_{k \geq 1, x} E_0[h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < \infty] \\ & P_0(D = \infty) = \end{aligned}$$

$$E_0(fg | D = \infty) P_0(\tau_1 < \infty) E_0^Q(h)$$

引理得证。

在 $\{\tau_1 < \infty\}$ 上定义一个递增的停时序列 $\tau_1 \leq$

$\tau_2 \leq \dots$, 其中

$$\tau_2 = \tau_1(X) + \tau_1(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1})$$

.....

$$\tau_{k+1} = \tau_1(X) + \tau_k(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1})$$

注意到 $\{\tau_k < \infty\} = \{\tau_1 < \infty\} = A_l \quad P_0 - \text{a.s.}$

引入一个 σ 域

$$\mathcal{G} = \sigma(\tau_1, \dots, \tau_k, (X_n \wedge \tau_k)_{n \geq 0}, (\omega(y, \cdot))_{l.y < l.X_{\tau_k}})$$

引理 4 对 $k \geq 1$

$$Q_0[(X_{\tau_k+n} - X_{\tau_k})_{n \geq 0} \in \cdot,$$

$$(\omega(X_{\tau_k} + y, \cdot))_{l.y \geq 0} \in \cdot | \mathcal{G}] =$$

$$P_0[(X_n)_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega(y, \cdot))_{l.y \geq 0} \in \cdot | D = \infty]$$

证明 证明可用递推法, 然后利用引理 3 马上可得。

引理 5 在 Q_0 下, $(X_{\tau_1}, \tau_1), (X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$ 是独立的随机变量, 并且 $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$ 在 $P_0(\cdot | D = \infty)$ 下与 (X_{τ_1}, τ_1) 同分布。

证明 这显然是引理 4 的直接推论。

注 由引理 5 可知过程 X 的更新结构。

3 一个大数定理

定理 2 对于上述过程 $(X_n)_{n \geq 0}$, 满足条件 (2), 且

$$E_0[\tau_1 | D = \infty] < \infty$$

则

$$E_0[X_{\tau_1} | D = \infty] < \infty,$$

$$\frac{X_n}{n} \rightarrow \frac{E_0[X_{\tau_1} | D = \infty]}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \quad Q_0 - \text{a.s.}$$

证明 因为 $|X_{\tau_1}| \leq \tau_1 \quad Q_0 - \text{a.s.}$, 所以很快就得到了第 1 个结论。

下证第 2 个结论。由引理 5 和强大数定理可知

$$\frac{\tau_k}{k} \rightarrow E_0[\tau_1 | D = \infty],$$

$$\frac{X_{\tau_k}}{k} \rightarrow E_0[X_{\tau_1} | D = \infty] \quad Q_0 - \text{a.s.} \quad (4)$$

定义一列递增数列 $k_n \uparrow \infty, n \geq 0 \quad Q_0 - \text{a.s.}$, 使得

$$\tau_{k_n} \leq n \leq \tau_{k_n+1}$$

不等式两边同时由 k_n 去除, 利用条件 (4) 可得

$$\frac{k_n}{n} \rightarrow \frac{1}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \quad (5)$$

又

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_{\tau_{k_n}}}{n} + \frac{X_n - X_{\tau_{k_n}}}{n} \tag{6}$$

由 (4), (5) 式得

$$\frac{X_{\tau_{k_n}}}{n} = \frac{X_{\tau_{k_n}}}{k_n} \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{E_0[X_{\tau_1} \mid D = \infty]}{E_0[\tau_1 \mid D = \infty]} Q_0 - \text{a.s.}$$

再由 (4) 式有

$$\begin{aligned} \frac{|X_n - X_{\tau_{k_n}}|}{n} &\leq \frac{\tau_{k_n+1} - \tau_{k_n}}{n} = \\ \frac{\tau_{k_n+1}}{k_n+1} \frac{k_n+1}{n} - \frac{\tau_{k_n}}{k_n} \frac{k_n}{n} &\rightarrow 0 \\ Q_0 - \text{a.s.} \end{aligned}$$

再由 (6) 式可得定理 2.

致谢: 衷心感谢戴永隆教授的悉心指导.

参考文献:

[1] KALIKOW S A. Generalized random walk in a random environment[J] . Ann Prob, 1981, 9: 753—768.
[2] DURRETT R. Multidimensional random walk in random walks in random environments with subclassical limiting behavior[J] . Comm Math Phys, 1986, 104: 87—102.
[3] SOLOMON F. Random walk in a random environment[J] . Ann Prob, 1975, 3: 1—31.
[4] KESTEN H. A renewal theory for random walk in a random environment[J] . Proc Sympos Pure Math, 1977, 31: 67—77.
[5] HU Y, SHI Z. The limits of Sinai's simple random walk in random environment[J] . Ann Prob, 1998, 26: 1477—1521.
[6] COMETS F, GANTERT N, ZEITOUNI O. Quenched, annealed and function large deviations for one-dimensional random walk in random environment[J] . Prob Theory Relat Fields, 2000, 118: 65—114.

A Class of Multi-dimensional Random Walks in Random Environments

LIU Xiang dong¹, GUO Xian ping²

(1. Department of Statistics, Jinan University, Guangzhou 510632, China;
2. Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A class of random walks on $Z^d, d \geq 2$, in random environments is described and analyzed. A necessary condition of recurrence ($E \log \frac{\omega(x, e_i)}{\omega(x, -e_i)} = 0, i = 1, \cdots, d$) is obtained. Using Kalikow's 0—1 law, the renewal structure of the model is discussed and the law of large numbers for X_n/n is derived.

Key words: multi dimensional random walk; random environment; recurrence; strong law of large numbers