

# 平面有分枝圆模式的 Andreev Thurston 定理<sup>\*</sup>

蓝 师 义

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

**摘 要:** 对于给定的一个拓扑圆盘的有限加权三角剖分, 证明了实现它的平面有分枝圆模式的存在性和惟一性定理. 根据单叶圆模式的存在性, 通过引进一种算法来构造所要求的圆模式, 然后证明这种算法是行之有效的而得到其存在性部分; 根据圆模式的圆半径比率函数的极大值原理, 推出其惟一性.

**关键词:** 复形; 圆模式; 有分枝圆模式

**中图分类号:** O174.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 06-0067-03

已经知道, 具有相同组合的两个圆格局 (circle configurations) 可用于近似共形映射 (见文 [1, 2]). 同时, 在研究解析函数和拟共形映射的近似方面, 圆格局也是一种重要的工具 (见文 [3, 4]). 对圆格局的研究, 从由其内部不相交的圆组成的圆包装 (circle packing) 发展到由其内部可以交叠 (overlap) 的圆组成的圆模式 (circle pattern). 文 [5, 6] 已经证明了单叶圆模式的存在性和惟一性. 在本文, 我们将其结果推广到有分枝的情形, 即讨论平面有分枝圆模式的存在性和惟一性问题, 有关的这些结果通常被称为 Andreev Thurston 定理. 我们的方法是根据单叶圆模式的存在性, 引进一种算法来构造所要求的有分枝圆模式, 然后, 证明这种算法是行之有效的, 从而得到其存在性. 最后, 通过证明具有相同组合的 2 个有分枝圆模式, 其对应圆半径之比函数满足极大值原理, 得出前面构造的圆模式对于欧氏等距变换来说是惟一的.

## 1 定义和引理

设  $T$  为一个拓扑圆盘  $X$  的有限三角剖分, 记  $T^{(0)}$ 、 $T^{(1)}$  和  $T^{(2)}$  分别表示  $T$  的顶点、边和三角形组成的集合. 令  $\Phi: T^{(1)} \rightarrow [0, \pi/2]$  为定义在  $T^{(1)}$  上的函数, 则称  $(T, \Phi)$  为  $X$  的权函数为  $\Phi$  的加权三角剖分. 进一步假设加权三角剖分  $(T, \Phi)$  满足条件

- (1) 对  $T$  中任意形成零同伦回路的 3 条边  $e_1, e_2, e_3$ , 若  $\sum_{i=1}^3 \Phi(e_i) \geq \pi$ , 则这 3 条边构成  $T$  的一个三角形的边界;
- (2) 对  $T$  中任意形成零同伦回路的 4 条边  $e_1,$

$e_2, e_3, e_4$ , 如果  $\sum_{i=1}^4 \Phi(e_i) \geq 2\pi$ , 那么  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$

构成 2 个相邻三角形并集的边界 (见文 [7]).

记  $\text{int } T^{(0)}$  为  $T$  的内部顶点组成的集合, 则一个集合  $\beta = \{(b_1, k_1), (b_2, k_2), \dots, (b_m, k_m)\} \subset (\text{int } T^{(0)}) \times \mathbf{N}$  称为  $(T, \Phi)$  的一个分枝点结构, 如果下列条件成立: 在  $T$  中每条至少包含一个顶点的简单闭的边路径  $\Gamma = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 不等式

$$\sum_{j=1}^n [\pi - \Phi(e_j)] > (2l(\Gamma) + 2)\pi$$

成立, 这里  $l(\Gamma) = \sum_{i=1}^m \delta(\Gamma) k_i$ , 其中  $\delta(\Gamma)$  等于 1 若  $\Gamma$  包围  $b_i$  时, 否则等于零.

设  $P$  是复平面  $\mathbf{C}$  内的一个圆格局, 则称  $P$  为实现加权三角剖分  $(T, \Phi)$  的一个圆模式, 如果 (1) 在顶点  $v \in T^{(0)}$  与圆  $P(v)$  之间存在一个 1-1 对应且使得  $P(v)$  与  $P(w)$  以交叠角为  $\Phi([v, w])$  相交, 这里  $[v, w]$  表示连结  $v$  与  $w$  的边;

(2)  $P$  是保持方向的, 也就是, 若  $v_1, v_2, v_3$  是  $T$  的一个面取正方向的 3 个顶点, 则圆  $P(v_1), P(v_2), P(v_3)$  在平面  $\mathbf{C}$  内形成一个正方向的 3 个圆. 特别地, 若要求  $P$  中没有一个圆包含于其他 2 个圆的并集, 则这样的圆模式称为单叶圆模式.

若  $P$  是一个实现  $(T, \Phi)$  的圆模式, 则将  $T$  的每个顶点分配给  $P$  内与其对应圆的半径的函数  $r: T^{(0)} \rightarrow (0, \infty)$  称为  $P$  的半径函数, 函数  $r$  按下面方式决定  $T$  中每个内部顶点的角总和:

记  $A(P(u))$  为圆  $P(u)$  的中心, 对于  $v \in \text{int } T^{(0)}$ , 在点  $v$  的角总和  $\Theta_r(v)$  是  $\sum \alpha_r(v, \triangle)$ , 求和是

\* 收稿日期: 2003-10-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10231040, 10071096, 60175031)

作者简介: 蓝师义 (1966 年生), 男, 博士; E-mail: shiyilan05@sina.com

指对在  $T$  内顶点  $v$  星中所有的面, 而  $\alpha_r(v, \triangle) = \alpha_r(v, \triangle(v, u_1, u_2))$  是  $\triangle A(P(v))A(P(u_1))A(P(u_2))$  在顶点  $A(P(v))$  的内角.

显然, 对  $\forall v \in \text{int } T^{(0)}$ , 由  $P$  决定的关于它的角总和等于  $2n\pi$ ,  $n \geq 1$ , 若  $n \geq 2$ , 则这个内部顶点  $v$  称为  $P$  的  $(n-1)$  阶分枝点. 在这种情况下,  $P$  中与该分枝点相邻的点对应的圆绕与这个分枝点对应的圆  $n$  次. 若  $b_1, b_2, \dots, b_m$  是  $P$  中所有阶数分别为  $k_1, k_2, \dots, k_m$  的分枝点, 则  $br(P) = \{(b_1, k_1), (b_2, k_2), \dots, (b_m, k_m)\}$  称为  $P$  的分枝集. 若强调一个圆模式有(或没有)一个分枝点, 则称它为有分枝(或没有分枝)圆模式, 此文讨论的是有分枝圆模式.

关于圆模式, 给出下面 2 个引理.

引理 1 设  $(T, \Phi)$  是一个闭拓扑圆盘的有限加权三角剖分, 并且满足条件 (1) 与 (2). 假设对  $T$  的任意边界顶点  $v$ ,  $R(v)$  是给定的正数, 则在平面  $\mathbf{C}$  存在一个实现  $(T, \Phi)$  的单叶圆模式  $Q$ , 使得对每个边界顶点  $v$ ,  $r(Q(v)) = R(v)$ . 并且,  $Q$  对于欧氏等距变换来说是惟一的 (见文 [5, 6]).

引理 2 设  $r_1, r_2, r_3$  是正的实数,  $\Phi_{i,j} \in [0, \pi/2]$ , 这里  $(i, j) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$ . 则存在一个由 3 个圆  $C_0, C_1, C_2$  组成的圆格局使得  $r(C_k) = r_k (0 \leq k \leq 2)$ ,  $C_i$  和  $C_j$  的交叠角等于  $\Phi_{i,j}$ , 且这个圆格局对欧氏等距变换来说是惟一的 (见文[6]).

2 平面有分枝点圆模式的存在性和惟一性

证明下面平面有分枝点圆模式的存在性和惟一性定理, 即 Andreev Thurston 定理.

定理 设  $(T, \Phi)$  是一个闭拓扑圆盘的有限的加权三角剖分, 并且满足第 1 节条件 (1) 和 (2). 若  $\beta = \{(b_1, k_1), (b_2, k_2), \dots, (b_m, k_m)\}$  是  $(T, \Phi)$  的分枝点结构, 则在复平面  $\mathbf{C}$  存在一个实现  $(T, \Phi)$  分枝集为  $\beta$  的圆模式  $P$  使它具有任意指定的边界半径. 并且, 圆模式对欧氏等距变换来说是惟一的.

证明 分 2 步来证明.

第一步, 证明存在性. 我们要构造一个圆模式具有给定的边界半径并且满足下面要求:

- ( i )  $\Theta(b_j) = (k_j + 1)2\pi, j = 1, 2, \dots, m$  ;
- ( ii )  $\Theta(v) = 2\pi$ , 对  $v \in \text{int } T^{(0)} - \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ , 这里,  $\Theta(v)$  表示由该圆模式的圆半径决定的在  $v$  的角总和.

设  $\{v_i\}_{i=1}^N$  与  $\{w_i\}_{i=1}^M$  分别为  $T$  的内部顶点和边界顶点. 则对于给定的边界半径  $R(w_j) (j = 1, 2, \dots, M)$ , 根据引理 1, 存在一个实现  $(T, \Phi)$  的单叶圆

模式  $Q$ . 记  $r(v_i) (i = 1, 2, \dots, N)$  表示  $Q$  中对应于内部顶点  $v_i$  的圆的半径,  $\Psi(v)$  表示  $Q$  在点  $v$  的角总和. 下面描述一个算法来构造一个由  $(T, \Phi)$  和  $\beta$  决定的有分枝圆模式, 它是通过一系列的回合来实现, 对每一次回合, 使边界半径  $R(w_j)$  保持不变.

根据引理 2, 可以调整内部圆半径  $r(v_i)$  使 2 个相邻圆的交叠角不变, 同时使圆模式在  $v_i$  的角总和满足上面要求 ( i ) 与 ( ii ). 每一回合结束, 我们得到一个半径的集合. 最后, 取这些半径极限的集合, 就得到所要求的圆模式的半径集合. 具体过程用归纳法定义如下:

第 0 回合, 设  $r_0(v_i) = r(v_i), i = 1, 2, \dots, N$ , 得到半径之集记为  $\{r_0(v_i)\}_{i=1}^N$ . 假设第  $n$  回合已经定义, 得到半径之集记为  $\{r_n(v_i)\}_{i=1}^N$ . 现在要描述第  $n+1$  回合, 从  $v_1$  开始, 由于  $\beta$  是  $(T, \Phi)$  的分枝点结构, 因此,  $v_1$  至少有  $1 + \Theta(v_1)/\pi$  个相邻顶点, 这样, 如果有必要的话, 可以调整  $r_n(v_1)$  到  $r_{n+1}(v_1)$  使得由  $\{r_{n+1}(v_1), r_n(v_2), \dots, r_n(v_N)\} \cup \{R(w_i)\}_{i=1}^M$  决定在  $v_1$  的角总和等于  $\Theta(v_1)$ , 同时, 由引理 2, 可以使相邻圆的交叠角不变. 接着, 考虑顶点  $v_2$ , 同样, 由于  $\beta$  是  $(T, \Phi)$  的分枝点结构, 所以  $v_2$  至少有  $1 + \Theta(v_2)/\pi$  个相邻顶点, 于是, 若有必要的话, 可以调整  $r_n(v_2)$  到  $r_{n+1}(v_2)$  使得由  $\{r_{n+1}(v_1), r_{n+1}(v_2), r_n(v_3), \dots, r_n(v_N)\} \cup \{R(w_i)\}_{i=1}^M$  决定的在  $v_2$  的角总和等于  $\Theta(v_2)$ , 同时使得相邻圆的交叠角不变. 继续这样调整, 直到  $v_N$ , 这时, 得到半径之集记为  $\{r_{n+1}(v_i)\}_{i=1}^N$ . 最后, 令  $R(v_i) = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n(v_i)$ , 则得到半径极限的集合记为  $\{R(v_i)\}_{i=1}^N$ .

以下将证明, 集合  $\{R(v_i)\}_{i=1}^N \cup \{R(w_i)\}_{i=1}^M$  就是要求的圆模式的半径集合.

首先, 由圆模式的角总和关于半径的单调性, 我们知道  $\{r_n(v)\} (v \in \text{int } T^{(0)})$  是单调不增加的正数序列, 所以, 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(v)$  存在, 由此,  $R(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(v)$ , 而且有

命题 1 若  $R(v) > 0$ , 则  $\{\Theta_n(v)\}_{n=1}^\infty$  收敛于  $\Theta(v)$ , 这里  $\Theta_n(v)$  表示由  $\{r_n(v_1), r_n(v_2), \dots, r_n(v_N)\} \cup \{R(w_j)\}_{j=1}^M$  决定的在  $v$  的角总和.

证明 令  $u_1, u_2, \dots, u_k (u_{k+1} = u_1)$  表示  $T$  中  $v$  相邻顶点的链, 若  $\rho: T^{(0)} \rightarrow (0, \infty)$ , 则  $\Theta_\rho(v)$  表示由  $\rho$  决定的在  $v$  的角总和.

注意到  $\Phi$  是固定的, 根据  $\Theta_\rho(\cdot)$  的定义, 我们知道,  $\Theta_\rho(\cdot)$  只依赖于  $\rho$  在  $v$  和它相邻顶点  $u_1, u_2, \dots, u_k$  的值, 准确地说,

$$\Theta_p(v) = \Theta_p(\rho(v); \rho(u_1), \dots, \rho(u_k)) = \sum_{j=1}^k \arccos \left[ \frac{l_{vu_j}^2 + l_{vu_{j+1}}^2 - l_{u_j u_{j+1}}^2}{2l_{u_j} l_{u_{j+1}}} \right]$$

这里,

$$l_u = \sqrt{\rho^2(v) + \rho^2(u) + 2\rho(v)\rho(u)\cos(\angle v, u)}^{[7]}$$

从这个公式可以看出, 对  $\forall \delta > 0$ ,  $\Theta_p(v)$  作为  $[\delta, \infty) \times [0, \infty) \times \dots \times [0, \infty)$  的函数是连续的, 而且在上面积的任意紧子集上是一致连续的。

记  $\eta = \max_{i,j} \{r(v_i), R(w_j)\}$ , 则  $\Theta_p(v)$  对  $[R(v), l, r(v)] \times [0, \eta]^k$  是一致连续的。另外, 有

$$\Theta_n(v) \geq \Psi_{n+1}(v), \Theta_n(v) \leq \Psi_n(v)$$

这里  $\Psi_n(v_i)$  表示由  $\{r_n(v_1), \dots, r_n(v_i), r_{n-1}(v_{i+1}), \dots, r_{n-1}(v_N)\} \cup \{R(w_j)\}_{j=1}^M$  决定的在  $v_i$  的角总和。

于是, 有

$$\Theta(v) \equiv \Psi_n(v) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(v)$$

其次, 我们断言

命题2 对于任意  $v \in \text{int } T^{(0)}$ ,  $R(v) > 0$ 。

证明 用反证法。假设存在一个  $v_{i_0}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 使得  $R(v_{i_0}) = 0$ 。将  $r_n(\cdot)$  和  $R(\cdot)$  的定义扩展到  $T$  的边界顶点, 即令  $r_n(w_j) = R(w_j)$  与  $R(w_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(w_j)$ 。称顶点  $u$  为一个实(solid)点若  $R(u) > 0$ , 否则称它开(open)点, 记  $SD$  和  $OD$  分别表示所有的实点和开点组成的集合。显然,  $SD$  和  $OD$  都是非空的, 因为所有边界顶点都是实点, 根据假设  $v_{i_0} \in OD$ 。类似于文[4]的 §2引理4的证明, 可推出这样的结论: 在  $\text{int } T^{(0)}$  内不存在至少包含一个开点同时又被一条实点的路径所包围的子集。这与假设发生矛盾, 故命题成立。

这样, 由命题2和命题1, 我们得到, 对  $\forall v_i \in \text{int } T^{(0)}$ ,  $R(v_i) > 0$ , 并且  $\{\Theta_n(v_i)\}_{n=1}^\infty$  收敛于  $\Theta(v_i)$ , 同时任意两个相邻圆的交叠角在求极限过程中是保持不变的。于是, 半径集  $\{R(v_i)\}_{i=1}^N \cup$

$\{R(w_j)\}_{j=1}^M$  就是所要求的有分枝圆模式的半径集合, 这就完成了第1步存在性的证明。

第2步, 再证明惟一性。

假设  $P_1$  和  $P_2$  是实现  $(T, \Phi)$  有分枝集为  $\beta$  的2个圆模式, 并且它们有相同的边界半径。

记  $R_i(\cdot): T^{(0)} \rightarrow (0, \infty)$  为  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ) 的半径函数, 定义  $R_1/R_2(\cdot): T^{(0)} \rightarrow (0, \infty)$  为  $R_1/R_2(u) = \frac{R_1(u)}{R_2(u)}$ 。

由于  $P_1$  与  $P_2$  在对应顶点上有相同的角总和, 根据角总和对半径的单调性, 可知  $R_1/R_2(\cdot)$  满足极大值原理, 即  $R_1/R_2(\cdot)$  不可能在  $\text{int } T^{(0)}$  内达到最大值或最小值, 除非它是常数。由此推出  $R_1(\cdot) \equiv R_2(\cdot)$ 。

这样, 就完成了本定理的证明。

致谢: 感谢戴道清教授对本文的有益指导和建议。

参考文献:

- [1] RODIN B, SULLIVAN D. The convergence of circle packings to the Riemann mapping[J]. J Differential Geom, 1987, 26: 347—360.
- [2] STEPHENSEN K. Circle packing in the approximation of conformal mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1990, 23: 407—415.
- [3] AGAFONOV S I. Imbedded circle pattern with combinatorics of the square grid and discrete Painleve equation[J]. Discrete Comput Geom, 2003, 29: 305—319.
- [4] DUBEJKO T. Branched circle packings and discrete Blaschke product[J]. Trans Amer Math Soc, 1995, 347(10): 4073—4103.
- [5] HE Z X. Rigidity of infinite disk patterns[J]. Ann of Math, 1999, 149: 1—33.
- [6] MARDEN A, RODIN B. On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem, in computational Methods and Function Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1989: 103—115.
- [7] THURSTON W. The geometry and topology of 3-manifolds [M]. Princeton: Princeton University Notes, 1980.

## A Branched Andreev-Thurston Theorem for Circle Pattern in The Plane

LAN Shi yi

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** The existence and uniqueness theorem of finite branched circle patterns in the complex plane which realizes a given finite weighted triangulation of a topological disk with a weight function defined on the sets of edges is established. The existence part of the theorem is done by introducing an algorithm for construction of a branched circle pattern, and then by showing that such an algorithm really works. The uniqueness part is obtained by the maximum principle for the radius ratio function.

**Key words:** complex; circle pattern; branched circle pattern