

二阶时标动力系统的振动准则^{*}

刘爱莲, 朱思铭, 吴洪武

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 通过 Riccati 变换, 讨论了二阶时标非线性动力系统 $(R(t)x^\Delta(t))^\Delta + Q(t)F(x(t)) = 0, t \in \mathbf{T}$ 的一些新的振动准则, 得出了系统振动的几个充分条件; 并在文末举例说明了得到的结论是对原有结果的推广。

关键词: 时标; 动力系统; 振动性; Δ -导数

中图分类号: O175.12; O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 02-0009-04

1 研究背景

考虑定义在时标 (Time scales) $\mathbf{T}$ 上的二阶时标动力系统:

$$(R(t)x^\Delta(t))^\Delta + Q(t)F(x(t)) = 0, \quad t \in \mathbf{T} \quad (1)$$

其中自变量 t 在时标 $\mathbf{T}$ 中取值. 时标最初是由 Stefan Hilger^[1] 提出的, 目的是把连续和离散统一起来进行讨论, 并在此基础上推广到更一般的情形. 这一理论在近几年得到了广泛关注, 发展迅速. 一个时标 $\mathbf{T}$ 是指实数集 $\mathbf{R}$ 的一个闭子集, 它具有由 $\mathbf{R}$ 诱导的拓扑以及 $\mathbf{R}$ 中的顺序关系. 在 $\mathbf{T}$ 上本文定义了前跳算子 $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbf{T}; s > t\}$ 和后跳算子 $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbf{T}; s < t\}$. 对于函数 $f: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$, 我们说 $f^\Delta(t)$ 是 f 在 $t \in \mathbf{T}$ 处的 Δ -微分, 如果

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

存在 (此处 $f^\Delta(t)$ 要求 $t \in \mathbf{T}^k := \mathbf{T} \setminus \{m\}$, 如果 m 存在, 其中 m 是指 $\mathbf{T}$ 的最大孤立点), 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbf{T}$ 使得

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon, \quad |\sigma(t) - s| > 0$$

对所有 $t \in U$ 成立. 称 $f(t)$ 在 $\mathbf{T}^k$ 是可微的, 如果对所有的 $t \in \mathbf{T}^k$, $f^\Delta(t)$ 都存在. 关于 $f^\Delta(t)$ 的性质 (如: 分部积分公式等) 可参考 Bohner 和 Peterson 的专著^[2].

称函数 $f: \mathbf{T} \rightarrow S \subseteq \mathbf{R}$ 为 rd-连续的 (右稠连续的), 如果 f 在所有右稠密点连续 (所谓右稠密点是指满足 $\sigma(t) = t$ 的点), 且在所有的左稠密点 ($\rho(t) = t$) 和右发散点 ($\sigma(t) > t$) 的左极限存在. 记为: $f \in C_{rd}(\mathbf{T}, S)$. 文 [2] 表明右稠连续函数一定有原函数. 其柯西积分由 $\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$ 定义, 其中 $a, b \in \mathbf{T}$, $F(t)$ 满足 $F^\Delta(t) = f(t)$; 知 $\int_a^b f(t)\Delta t$ 存在且有限. 如果 $a \in \mathbf{T}$, $\sup \mathbf{T} = \infty$, 且 f 是 $[a, \infty)$ 上的右稠连续函数, 则可以定义广义积分如下

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)\Delta t$$

如果极限存在, 则称广义积分是收敛的, 如果极限不存在, 称广义积分是发散的.

方程 (1) 的一个解是指定义在 $\mathbf{T}$ 的区间 $[t_0, \infty)$ 上的一个实值函数 x , 且满足系统 (1). 称方程 (1) 的一个解 $x: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个最终正解, 如果存在 $a \in \mathbf{T}$ 使得 x 在 $[a, \infty)$ 是正的. 考虑到时标 $\mathbf{T}$ 或许是不连续的, 称函数 $x: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$ 在 $\tau \in \mathbf{T}$ 有一个一般的零点, 如果 $x(\tau) = 0$ 或者 τ 是左发散的 ($\rho(\tau) < \tau$) 且 $x(\tau)x(\rho(\tau)) < 0$. 称方程 (1) 的一个解是振动的, 如果对任何 $r \in \mathbf{T}$ 存在一个 $t \in \mathbf{T}$ 满足 $t > r$ 使得 x 在 t 有一个一般的零点.

* 收稿日期: 2003-06-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371135)

作者简介: 刘爱莲 (1977年生), 女, 博士生; 通讯联系人: 朱思铭; E-mail: stszsm@zsu.edu.cn

当 $T = \mathbf{Z}$ 或 $T = \mathbf{R}$ 时, 关于方程(1) 已得到不少的振动准则^[3-6], 本文将减弱或去掉一些限制条件, 并且将这些结果推广到一般的时标上. 本文把 $\mathbf{R}$ 中的二阶非线性常微分方程的振动准则推广到时标动力方程^[1-2] 中, 同时在时标动力系统中考虑了 $H(t, s)k(s)$ 型的函数, 得到了新的振动准则.

2 主要结论

以下总假设:

- (1) $R(t) \in C_{rd}(\mathbf{T}, \mathbf{R}), \mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$;
- (2) $Q(t) \in C_{rd}(\mathbf{T}, \mathbf{R}^0), Q(t)$ 不最终恒为 0, $\mathbf{R}^0 = [0, +\infty)$;
- (3) $F \in C_{rd}(\mathbf{T}, \mathbf{R}), xF(x) > 0 (x \neq 0)$, 且 $F(x)/x \geq K > 0 (x \neq 0), K = \text{常数}$;
- (4) $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{R(t)} \Delta t = \infty$.

定理 1 假设(1)–(4) 满足, 且存在 $q(t) \in C_{rd}(\mathbf{T}, \mathbf{R}^+)$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)} \right] \Delta s = \infty \quad (2)$$

则方程 (1) 是振动的.

证明 若方程 (1) 存在非振动解 $x(t)$, 则存在充分大的 $T_0 \in \mathbf{T}$, 使当 $t \geq T_0 (t \in \mathbf{T})$ 时, $x(t) \neq 0$. 不妨设 $x(t)$ 最终为正, 即对所有的 $t \geq T_0, x(t) > 0$ (若 $x(t)$ 最终为负, 证明类似). 由方程 (1) 和条件 (2) 和条件 (3), 所以有

$$R(t)x^\Delta(t) > 0 \quad \text{即} \quad x^\Delta(t) > 0 \quad \text{当} \quad t \geq T_0 \quad (3)$$

事实上, 若 $R(t)x^\Delta(t) < 0$, 则存在 $\alpha < 0$, 使 $R(t)x^\Delta(t) < \alpha < 0, t \geq T_0$. 所以 $x^\Delta(t) < \frac{\alpha}{R(t)}$, 从而

$$x(t) - x(t_0) < \alpha \int_{t_0}^t \frac{1}{R(s)} \Delta s \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

所以 $x(t) < 0, (t \rightarrow \infty)$. 这与 $x(t)$ 是最终正解矛盾. 定义 Riccati 变换:

$$w(t) = q(t) \frac{R(t)x^\Delta(t)}{x(t)} \quad t \geq T_0 \quad (4)$$

则由时标上的乘积和商的导数公式^[2]

$$\begin{aligned} \omega^\Delta(t) &= \frac{[q(t)R(t)x^\Delta(t)]^\Delta x(t) - q(t)R(t)x^\Delta(t)[x(t)]^\Delta}{x(t)x(\sigma(t))} = \\ &= \frac{[q(t)[R(t)x^\Delta(t)]^\Delta + q^\Delta(t)R(\sigma(t))x^\Delta(\sigma(t))]x(t) - q(t)R(t)x^\Delta(t)x^\Delta(t)}{x(t)x(\sigma(t))} = \\ &= \frac{\frac{q^\Delta(t)R(\sigma(t))x^\Delta(\sigma(t))}{x(\sigma(t))} + q(t) \frac{[R(t)x^\Delta(t)]^\Delta x(t) - R(t)x^\Delta(t)x^\Delta(t)}{x(t)x(\sigma(t))} = \\ &= \frac{q^\Delta(t)R(\sigma(t))x^\Delta(\sigma(t))}{x(\sigma(t))} + q(t) \frac{[R(t)x^\Delta(t)]^\Delta x(\sigma(t)) - R(\sigma(t))x^\Delta(\sigma(t))x^\Delta(t)}{x(t)x(\sigma(t))} = \\ &= \frac{q^\Delta(t)R(\sigma(t))x^\Delta(\sigma(t))}{x(\sigma(t))} + q(t) \frac{[R(t)x^\Delta(t)]^\Delta}{x(t)} - \frac{q(t)R(\sigma(t))x^\Delta(\sigma(t))x^\Delta(t)}{x(t)x(\sigma(t))} = \\ &= \frac{q^\Delta(t)}{q(\sigma(t))} \omega(\sigma(t)) - q(t) \frac{Q(t)F(x(t))}{x(t)} - q(t) \frac{R(\sigma(t))x^\Delta(\sigma(t))x^\Delta(t)}{x(\sigma(t))x(t)} \end{aligned}$$

由假设 (1), (3), 和式 (4) 有

$$\begin{aligned} \omega^\Delta(t) &\leq \frac{q^\Delta(t)}{q(\sigma(t))} \omega(\sigma(t)) - Kq(t)Q(t) - \frac{q(t)}{q^2(\sigma(t))R(t)} \omega^2(\sigma(t)) = \\ &= -\frac{q(t)}{q^2(\sigma(t))R(t)} \left[\omega(\sigma(t)) - \frac{q^\Delta(t)q(\sigma(t))R(t)}{2q(t)} \right]^2 + \frac{R(t)[q^\Delta(t)]^2}{4q(t)} - Kq(t)Q(t) \leq \\ &= \frac{R(t)[q^\Delta(t)]^2}{4q(t)} - Kq(t)Q(t) \end{aligned} \quad (5)$$

对上式两端从 T_0 到 t 积分 ($t > T_0$) 有

$$\int_{T_0}^t \left[Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)} \right] \Delta s \leq \omega(T_0) - \omega(t) \leq \omega(T_0)$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t [Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)}] \Delta s = \\ & \int_{t_0}^{T_0} [Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)}] \Delta s + \int_{T_0}^t [Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)}] \Delta s \leq \\ & \omega(T_0) + \int_{t_0}^{T_0} [Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)}] \Delta s \leq \omega(T_0) + \int_{t_0}^{T_0} Kq(s)Q(s) \Delta s \end{aligned}$$

从而

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t [Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)}] \Delta s < \infty$$

与 (2) 式相矛盾。

定理 2 假设 (1) — (4) 满足, 记

$$D_0 = \{(t, s); t > s \geq t_0, t, s \in \mathbf{T}\}, \quad D = \{(t, s); t \geq s \geq t_0, t, s \in \mathbf{T}\}$$

存在 $H(t, s) \in C_{rd}(D, \mathbf{R})$, $h \in C_{rd}(D_0, \mathbf{R})$ 和 $k(s), q(s) \in C^1(\mathbf{T}, \mathbf{R}^+)$, 满足

(I) $H(t, t) = 0, t \geq t_0$; 在 D_0 上, $H(t, s) > 0$;

(II) $H(t, s)$ 在 D_0 上对 s 有连续且非正的偏导数, 即 $H_s^\Delta(t, s) \in C_{rd}; H_s^\Delta(t, s) \leq 0$;

(III) $[H(t, s)k(s)]_s^\Delta + \frac{q^\Delta(s)}{q(\sigma(s))}H(t, s)k(s) = -h(t, s)\sqrt{H(t, s)k(s)}$; 且如果

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t [H(t, s)k(s)Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)q^2(s)h^2(t, s)}{4q(s)}] \Delta s = \infty \quad (6)$$

则方程 (1) 是振动的。

证明 若方程 (1) 存在非振动解 $x(t)$, 则不妨设存在充分大的 $T_0 \in \mathbf{T}$, 使当 $t \geq T_0$ 时, $x(t) > 0$, $x^\Delta(t) > 0$. 定义 $\omega(t)$ 如 (4) 式所示, 则可以得到 (5) 式, 即

$$Kq(t)Q(t) \leq -\omega^\Delta(t) + \frac{q^\Delta(t)}{q(\sigma(t))}\omega(\sigma(t)) - \frac{q(t)}{q^2(\sigma(t))R(t)}\omega^2(\sigma(t))$$

在上式两边同乘 $H(t, s)k(s)$, 积分得

$$\begin{aligned} & \int_{T_0}^t H(t, s)k(s)Kq(s)Q(s)\Delta s \leq - \int_{T_0}^t H(t, s)k(s)\omega^\Delta(s) + \\ & \int_{T_0}^t H(t, s)k(s)\frac{q^\Delta(s)}{q(\sigma(s))}\omega(\sigma(s))\Delta s - \int_{T_0}^t H(t, s)k(s)\frac{q(s)}{q^2(\sigma(s))R(s)}\omega^2(\sigma(s))\Delta s \leq \\ & -[H(t, s)k(s)\omega(s)]_{T_0}^t + \int_{T_0}^t [H(t, s)k(s)]_s^\Delta \omega(\sigma(s))\Delta s + \\ & \int_{T_0}^t H(t, s)k(s)\frac{q^\Delta(s)}{q(\sigma(s))}\omega(\sigma(s))\Delta s - \int_{T_0}^t H(t, s)k(s)\frac{q(s)}{q^2(\sigma(s))R(s)}\omega^2(\sigma(s))\Delta s = \\ & H(t, T_0)k(T_0)\omega(T_0) + \int_{T_0}^t \left\{ [H(t, s)k(s)]_s^\Delta + \frac{q^\Delta(s)}{q(\sigma(s))}H(t, s)k(s) \right\} \omega(\sigma(s))\Delta s - \\ & \int_{T_0}^t H(t, s)k(s)\frac{q(s)}{q^2(\sigma(s))R(s)}\omega^2(\sigma(s))\Delta s = \\ & H(t, T_0)k(T_0)\omega(T_0) - \int_{T_0}^t h(t, s)\sqrt{H(t, s)k(s)}\omega(\sigma(s))\Delta s - \int_{T_0}^t \frac{H(t, s)k(s)q(s)}{q^2(\sigma(s))R(s)}\omega^2(\sigma(s))\Delta s = \\ & H(t, T_0)k(T_0)\omega(T_0) - \int_{T_0}^t H(t, s)k(s)\frac{q(s)}{q^2(\sigma(s))R(s)} \left[\omega(\sigma(s)) + \frac{h(t, s)q^2(\sigma(s))R(s)}{2q(s)\sqrt{H(t, s)k(s)}} \right]^2 - \\ & \frac{h^2(t, s)q^2(\sigma(s))R(s)}{4q(s)} \Delta s \leq H(t, T_0)k(T_0)\omega(T_0) - \int_{T_0}^t \frac{h^2(t, s)q^2(\sigma(s))R(s)}{4q(s)} \Delta s \end{aligned}$$

所以

$$\int_{T_0}^t H(t, s)k(s)Kq(s)Q(s) - \frac{h^2(t, s)q^2(\sigma(s))R(s)}{4q(s)} \Delta s \leq H(t, T_0)k(T_0)\omega(T_0)$$

对于 $t \geq T_0$, 有 $\int_{T_0}^t H(t, s)k(s)Kq(s)Q(s) - \frac{h^2(t, s)q^2(\sigma(s))R(s)}{4q(s)} \Delta s \leq$

$$\int_{t_0}^{T_0} H(t, s) k(s) K q(s) Q(s) - \frac{h^2(t, s) q^2(\sigma(s)) R(s)}{4 q(s)} \Delta s + H(t, T_0) k(T_0) \omega(T_0) \leqslant$$

$$KH(t, t_0) \int_{t_0}^{T_0} k(s) q(s) Q(s) \Delta s + H(t, T_0) k(T_0) \omega(T_0)$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[H(t, s) k(s) K q(s) Q(s) - \frac{R(s) q^2(s) h^2(t, s)}{4 q(s)} \right] \Delta s \leqslant$$
$$K \int_{t_0}^{T_0} k(s) q(s) Q(s) \Delta s + k(T_0) \omega(T_0) < \infty$$

这与 (6) 式矛盾。

3 举 例

考虑如下的二阶时标动力系统

$$(tx^\Delta(t))^\Delta + \frac{\gamma}{t} x(t) = 0, \quad t \geqslant t_0, t, t_0 \in \mathbf{T} \tag{7}$$

其中, $1/4 < \gamma < 1$. 此时 $R(t) = t, Q(t) = \gamma/t, F(x(t)) = x(t)$, 满足假设条件(1), (2), (3), 且 $K = 1$. 取 $q(s) = s$. 则当 $\mathbf{T} = \mathbf{R}$ 时

$$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{R(t)} \Delta t \int_{t_0}^\infty \frac{1}{t} dt = \infty$$
$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)} \right] \Delta s = \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[s \circ \frac{\gamma}{s} - \frac{s(s')^2}{4s} \right] ds = \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\gamma - \frac{1}{4} \right] ds = \infty$$

所以此时方程 (7) 是振动的。当 $\mathbf{T} = h\mathbf{Z} = \{hk; k \in \mathbf{Z}\}$ 时, 对于 $\mathbf{T}$ 上的积分有

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \sum_{k=a/h}^{b/h-1} f(kh) \circ h \quad (a < b)$$

所以

$$\int_{t_0}^\infty \frac{1}{R(t)} \Delta t = \int_{t_0}^\infty \frac{1}{t} \Delta t = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=t/h}^{t/h-1} \frac{1}{k} \circ h = \infty$$
$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[Kq(s)Q(s) - \frac{R(s)(q^\Delta(s))^2}{4q(s)} \right] \Delta s = \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[s \circ \frac{\gamma}{s} - \frac{s(s^\Delta)^2}{4s} \right] \Delta s = \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\gamma - \frac{1}{4} \right] \Delta s = \infty$$

所以此时方程 (7) 也是振动的。

参考文献:

[1] HILGER S. Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus[J] . Results Math, 1990, 18: 18—56.
[2] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scale; an introduction with applications[M] . Boston: Birkhauser, 2002.
[3] 王其如. 二阶非线性微分方程的振动准则[J] . 数学学报, 2002, 44(2): 371—376.
[4] ROGOVCHENKO Y V. Oscillation criteria for certain nonlinear differential equations[J] . J Math Anal Appl, 1999, 229(2): 399—416.
[5] HAMEDANI G G, KRENZ G S. Oscillation criteria for certain second order differential equations[J] . J Math Anal Appl, 1990, 149(1): 271—276.
[6] ERBE L. Oscillation criteria for second order nonlinear delay equations[J] . Canad Math Bull, 1973, 16(1): 49—56.

Oscillation Criteria for Second Order Dynamic Equations on Time Scales

LIU Ai tian, ZHU Si ming, WU Hong wu

(Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: By means of Riccati trans formation techniques, this paper discusses and establishes the oscillation criteria for the second order nonlinear dynamic equations $(R(t)x^\Delta(t))^\Delta + Q(t)F(x(t)) = 0, t \in \mathbf{T}$. Meanwhile a nontrivial example is given to illustrate the criteria.

Key words: time scales; dynamic equation; oscillation; Δ -derivative