

关于系数平方增长的带跳 BSDE 的解(I)^{*}

司徒荣, 黄 伟
(中山大学统计系, 广东 广州 510275)

摘 要: 讨论了系数关于 q 为平方增长, p 和 $-y$ 为指数增长的带跳倒向随机微分方程 (BSDE) 解的存在性, 以及有这种系数的反射 BSDE 解的存在性.

关键词: 带跳倒向随机微分方程 (BSDE); 反射 BSDE; 平方增长系数; Ito 公式; Girsanov 定理; 解的存在定理

中图分类号: O241.8 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2004) 06-0048-04

倒向随机微分方程 (BSDE) 在金融市场上有很重要的应用, 特别, 在期权定价问题上^[1,2]. 然而, 如果给美式期权定价, 将引出求解关于系数 q 平方增长的 BSDE^[3]. 对于连续的情形, 在文 [4] 中已有讨论. 这里, 对带跳的情形, 在克服新的困难后, 得到解的存在性. 还将结果推广到带跳的反射 BSDE 上. 这在连续的情形, 文 [4] 也不曾讨论过.

1 BSDE 解的定义

考虑以下 BSDE

$$y_t = Y + \int_t^T b(s, y_s, q_s, p_s, \omega) ds - \int_t^T q_s dw_s - \int_t^T \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz) \quad (1)$$

其中, $w_t = (w_t^1, \dots, w_t^d)$, $0 \leq t \leq T$, 是 d 维标准 Brownian 运动 (BM), $k(\cdot)$ 是 1 维 Poisson 点过程, $N_k(ds, dz)$ 是由 $k(\cdot)$ 产生的 Poisson 鞅测度, 满足

$$N_k(ds, dz) = N_k(ds, dz) - \Pi(dz) ds$$

其中, $\Pi(\cdot)$ 是某可测空间 $(Z, B(Z))$ 上的 σ -有限测度, $N_k(ds, dz)$ 是由 k 产生的 Poisson 计数测度, $\mathcal{F}$ 是由 $w_s, N_k([0, s], U) (s \leq t, U \in B(z))$ 产生的 σ 代数. 引入记号:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{R}) &= \left\{ f(t, \omega) : f(t, \omega) \text{ 是 } \mathcal{F}\text{-适应, } \mathbf{R} \text{ 取值, } \right. \\ &\quad \left. \text{满足 } E_{t \in [0, T]} \sup_{t \in [0, T]} |f(t, \omega)|^2 < \infty \right\} \\ L_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{R}^{\otimes d}) &= \left\{ f(t, \omega) : f(t, \omega) \text{ 是 } \mathcal{F}\text{-适应, } \mathbf{R}^{\otimes d} \text{ 取值, } \right. \\ &\quad \left. \text{满足 } E \int_0^T |f(t, \omega)|^2 dt < \infty \right\} \\ F_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{R}) &= \left\{ f(t, z, \omega) : f(t, z, \omega) \text{ 是 } \mathcal{F}\text{-可料, } \mathbf{R} \text{ 取值, } \right. \\ &\quad \left. \text{满足 } E \int_0^T \int_Z |f(t, z, \omega)|^2 \Pi(dz) dt < \infty \right\} \end{aligned}$$

定义 1 (x_t, q_t, p_t) 称为 BSDE (1) 的解, 如果 (x_t, q_t, p_t) 满足 BSDE (1), 且

$$(x_t, q_t, p_t) \in S_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{R}^d) \times L_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{R}^{\otimes d}) \times F_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{R})$$

由定义 1 可见, 需设 b 满足以下条件:

(A) $b: [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\otimes d} \times L_{\pi(\cdot)}^2(\mathbf{R}) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 是可测且 $\mathcal{F}$ 适应的, 其中

$$L_{\pi(\cdot)}^2(\mathbf{R}) = \left\{ f(z) : f(z) \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 取值, 满足 } \right. \\ \left. \|f\|^2 = \int_Z |f(z)|^2 \Pi(dz) < \infty \right\}$$

2 一个特殊的方程

先来讨论下面的 BSDE, $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} -d\tilde{y}_t &= -\int_Z \tilde{p}_t(z) \Pi(dz) dt - \tilde{q}_t dw_t - \\ &\quad \int_Z \tilde{p}_t(z) N_k(dt, dz) \\ \tilde{y}_T &= \exp(Y) \end{aligned} \quad (2)$$

假设 $|Y| \leq k_0$ 及 $\Pi(Z) < \infty$, 则 BSDE (2) 有惟一解 $(\tilde{y}_t, \tilde{q}_t, \tilde{p}_t)$, 进一步, 由 Girsanov 定理^[2,5,6], 不难证明:

$$\exp(-k_0) \geq \tilde{y}_t \geq \exp(-k_0) > 0$$

由关系 $\tilde{y}_t = \tilde{y}_{t-} + \Delta \tilde{y}_t$, 有 $\frac{\Delta \tilde{y}_t}{\tilde{y}_{t-}} \geq \exp(-2k_0) - 1$. 现在, 令

$$\begin{aligned} y_t &= \ln \tilde{y}_t, q_t = \tilde{y}_t^{-1} \tilde{q}_t, \\ \tilde{p}_t(z) &= \tilde{y}_t^{-1} \tilde{p}_t(z) \end{aligned}$$

由 Ito 公式

$$\begin{aligned} y_t &= Y - \int_t^T q_s dw_s - \\ &\quad \int_t^T \int_Z \ln(1 + \tilde{p}_s(z)) N_k(ds, dz) + \frac{1}{2} \int_t^T |q_s|^2 ds \end{aligned}$$

* 收稿日期: 2004-05-12

或者说 (y_t, q_t, p_t) 满足 BSDE:

$$y_t = Y - \int_t^T q_s dw_s - \int_t^T \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz) + \frac{1}{2} \int_t^T |q_s|^2 ds \tag{3}$$

其中, $p_s(z) = \ln(1 + \tilde{p}_s(z))$, 由上面可知, 如果 $s \in D_{k(\omega)}$, 则有

$1 + \tilde{p}_s(k(s, \omega), \omega) \geq \exp(-2k_0) > 0$
其中, $D_{k(\omega)}$ 是在 ω 给定的情形下, Poisson 点过程的定义域。因此 $\int_t^T \int_Z \ln(1 + \tilde{p}_s(z)) N_k(ds, dz)$ 是有意义的。进一步, 因为 $|\tilde{y}_t| \leq \exp(k_0)$, 因此 $|y_t| \leq k_0$;

$$|q_t| = \left| \frac{\tilde{q}_t}{\tilde{y}_t} \right| \leq \exp(k_0) \cdot |\tilde{q}_t| \in L^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^{\times d}),$$
$$p_s(z) = \ln(1 + \tilde{p}_s(z)) \leq \ln(1 + |\tilde{p}_s(z)|) \leq |\tilde{p}_s(z)| = \left| \frac{\tilde{p}_s(z)}{\tilde{y}_t} \right| \leq \exp(k_0) |\tilde{p}_s(z)| \in F^2_{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^1)$$

并且, 当 $s \in D_{k(\omega)}$ 时,

$$p_s(k(s, \omega), \omega) \geq -2k_0 \in F^2_{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^1)$$

故, 当 $s \in D_{k(\omega)}$ 时,

$$|p_s(k(s, \omega), \omega)|^2 \leq \exp(2k_0) |\tilde{p}_s(k(s, \omega), \omega)|^2 + 4k_0^2$$

从而, 下面2式成立:

$$E \int_0^T \int_Z |p_s(z)|^2 N_k(ds, dz) =$$
$$E \sum_{\substack{s \in D_{k(\omega)}, \\ s \in [0, T]}} |p_s(k(s, \omega), \omega)|^2 N_k(\{s\}, \{k(s, \omega)\}) \leq$$
$$4k_0^2 T \Pi(Z) + \exp(2k_0) E \int_0^T \int_Z |\tilde{p}_s(z)|^2 \Pi(dz) ds < \infty$$
$$E \left| \int_0^T \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz) \right|^2 =$$
$$E \int_0^T \int_Z |p_s(z)|^2 \Pi(dz) ds =$$
$$E \int_0^T \int_Z |p_s(z)|^2 N_k(ds, dz) < \infty$$

这里, 注意到 BSDE (3) 的系数是关于 q 为平方增长的, 故得结论:

命题 BSDE (3) 存在一个解 $(y_t, q_t, p_t) \in S^2_{\mathcal{F}} \times L^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^{\times d}) \times F^2_{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^1)$, 如果 $\Pi(Z) < \infty, Y \in \mathcal{T}$ 且 $|Y| \leq k_0$, 进一步有 $|y_t| \leq k_0$ 。BSDE (3) 还可写成

$$y_t = Y - \int_t^T q_s dw_s - \int_t^T \int_Z p_s(z) N_k(ds, dz) - \int_t^T \left(\int_Z p_s(z) \Pi(dz) - \frac{1}{2} |q_s|^2 \right) ds$$

现对 $\exp\left[-\int_0^t a_s ds\right] \circ y_t$ 用 Ito 公式, 易证

$$(\bar{y}_t, \bar{q}_t, \bar{p}_t) = \left\{ \exp\left[-\int_0^t a_s ds\right] \circ y_t, \exp\left[-\int_0^t a_s ds\right] \circ q_t, \exp\left[-\int_0^t a_s ds\right] \circ p_t \right\}$$

满足

$$\bar{y}_t = \exp\left[-\int_0^T a_s ds\right] Y - \int_t^T \bar{q}_s dw_s - \int_t^T \int_Z \bar{p}_s(z) N_k(ds, dz) + \int_t^T \left(a_s y_s - \int_Z \bar{p}_s(z) \Pi(dz) + \frac{1}{2} \exp\left[\int_0^s a_r dr\right] |\bar{q}_s|^2 ds \right) \tag{4}$$

其中, (y_t, q_t, p_t) 是 BSDE (3) 的一个解。因此, 我们可以得到以下的结论:

定理1 BSDE (4) 存在一个解 $(\bar{y}_t, \bar{q}_t, \bar{p}_t) \in S^2_{\mathcal{F}} \times L^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^{\times d}) \times F^2_{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^1)$, 如果 $\Pi(Z) < \infty, \int_0^T |a_s(\omega)| ds \leq k_1 < \infty, Y \in \mathcal{T}$ 且 $|Y| \leq k_0$ 。进一步, 还有 $|\bar{y}_t| \leq k_0 = k_0 e^{k_1}$ 。

3 一般方程

一般地, 我们考虑如下的 BSDE:

$$dy_t = (-b(t, y_t, q_t, p_t, \omega) + \int_Z p_t(z) \Pi(dz)) dt + q_t dw_t + \int_Z p_t(z) N_k(dt, dz),$$
$$y_T = e^Y \tag{5}$$

假设其满足下列假设组合 (A):

1° $|b(t, x, q, p, \omega)| \leq c_1(t)(1 + |x|) + \tilde{c}_2(t)(1 + |q| + \|p\|)$
其中, $c_1(t) \geq 0$, 和 $\tilde{c}_2(t) \geq 0$ 是非负与非随机的, 且满足

$$\int_0^T (c_1(t) + \tilde{c}_2(t)^2) dt < \infty$$
$$2^\circ |b(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(t, x_2, q_2, p_2, \omega)| \leq c_1(t) |x_1 - x_2| + \tilde{c}_2(t) (|q_1 - q_2| + \|p_1 - p_2\|)$$

其中, $c_1(t)$ 和 $\tilde{c}_2(t)$ 满足上述1°, 且进一步有

$$|b(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(t, x_2, q_2, p_2, \omega)| - \int_Z (p_1(z) - p_2(z)) \Pi(dz) \leq \int_Z C_t(z) |p_1(z) - p_2(z)| \Pi(dz)$$

且 $0 \leq C_t(z) \in F^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^1), C_t(z) \leq 1$, 进一步地, 还有 $b(t, 0, 0, 0, \omega) \geq 0$ 。

3° $Y \in \mathcal{T}, |Y| \leq k_0$,

4° $\Pi(Z) < \infty$,

则下面的 BSDE, 存在惟一解 (x_t, q_t, p_t) :

$$\begin{aligned} x_t = \exp(Y) + \int_t^T (b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) - \\ \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) \Pi(dz)) ds - \int_t^T q_s dw_s - \\ \int_t^T \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) N_k(ds, dz), \end{aligned}$$

并且还存在着常数

$$\begin{aligned} r_0 = \exp(-k_0) \circ \exp\left[-\int_0^T c_1(t) dt\right] > 0, \\ k_0 = \exp(k_0) \circ \exp\left[\int_0^T c_1(t) dt\right] > 0, \end{aligned}$$

且有

$$k_0 \geq x_t \geq r_0, \forall t \in [0, T]$$

因此, 有 $r_0 \leq x_{t-} + \Delta x_t \leq k_0$. 故 $\frac{\Delta x_t}{x_{t-}} \geq \frac{r_0}{k_0} - 1$. 现在令

$$\tilde{y}_t = \ln x_t, \tilde{q}_t = \frac{q_t}{x_t}, \tilde{p}_t(z) = \ln\left[1 + \frac{p_t(z)}{x_{t-}}\right]$$

则与上述讨论类似, 运用 Itô 公式等等, 不难得出以下结论:

定理 2 在假设 (A) 的 1°-4° 的条件下, 则对于下面的这个带跳 BSDE, 存在一个解 $(\tilde{y}_t, \tilde{q}_t, \tilde{p}_t) \in S^2_{\mathcal{A}} \times L^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^{\times d_1}) \times F^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^1)$.

$$\begin{aligned} -d\tilde{y}_t = b(t, \tilde{y}_t, \tilde{q}_t, \tilde{p}_t, \omega) - \\ \tilde{q}_t dw_t - \int_{\mathcal{Z}} \tilde{p}_t(z) N_k(dt, dz), \tilde{y}_T = Y \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} b(t, \tilde{y}_t, \tilde{q}, \tilde{p}, \omega) = \\ -\exp(\tilde{y}) b(t, \exp(\tilde{y}), \tilde{q} \exp(\tilde{y}), \\ (\exp(\tilde{p}(\cdot))) - 1) \exp(\tilde{y}), \omega) + \\ \frac{1}{2} |\tilde{q}|^2 - \int_{\mathcal{Z}} \tilde{p}(z) \Pi(dz) \end{aligned}$$

是含有关于 $\tilde{q}$ 平方增长的系数, 进一步, 还有解 $\tilde{y}_t$ 是有界的, 即:

$$|\tilde{y}_t| \leq \max\{\ln(k_0), |\ln(r_0)|\}$$

在这个 BSDE 中, 系数是关于 $\tilde{q}$ 为平方增长且关于 $\tilde{p}$ 为指数增长的.

例子 令

$$\begin{aligned} b(t, x, q, p) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)q + \\ c_3(t) \int_{\mathcal{Z}} p(z) \Pi(dz) \end{aligned}$$

其中, $c_i(t) (i = 0, 1, 2, 3)$ 是非随机的, 且有

$$\begin{aligned} \int_0^T (\omega(t) + |c_1(t)| + |c_2(t)|^2 + \\ |c_3(t)|^2) dt < \infty, \\ c_0(t) \geq 0, 0 \leq c_3(t) < 1 \end{aligned}$$

则条件 (A) 中 1°, 2° 成立. 因此, 在满足假设 (A) 3° 和 (A) 4° 的条件下, BSDE (6) 存在一个解 $(\tilde{y}_t, \tilde{q}_t, \tilde{p}_t) \in S^2_{\mathcal{A}} \times L^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^{\times d_1}) \times F^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^1)$ 其中, 系数为

$$\begin{aligned} b(t, \tilde{y}, \tilde{q}, \tilde{p}, \omega) = \\ c_0(t) \exp(-\tilde{y}) + c_1(t) + c_2(t) \tilde{q} + \frac{1}{2} |\tilde{q}|^2 + \\ c_3(t) \int_{\mathcal{Z}} (\exp(\tilde{p}(z)) - 1) \Pi(dz) - \int_{\mathcal{Z}} \tilde{p}(z) \Pi(dz) \end{aligned}$$

是关于 $\tilde{q}$ 的平方增长和关于 $-\tilde{y}$ 的指数增长的, 并且关于 $\tilde{p}$ 也是指数增长的.

4 关于系数对 q 为平方增长的反射 BSDE 的解

现在, 考虑如下反射 BSDE (RBSDE):

$$\begin{aligned} x_t = \exp(Y) + \int_t^T (b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) - \\ \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) \Pi(dz)) ds - \int_t^T q_s dw_s - \\ \int_t^T \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) N_k(ds, dz) + K_T - K_t, \end{aligned} \quad (7)$$

定义 2 (x_t, q_t, p_t, K_t) 是方程 (7) 的解, 若 $(x_t, q_t, p_t) \in S^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^1) \times L^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^{\times d}) \times F^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{R}^1)$ 与 K_t 满足方程 (7), 且 K_t 是实连续增 $\mathcal{A}$ -适应, $K_0 = 0$, $K_T \in L^2$, 且

$$\int_0^t (x_s - S_s) dK_s = 0, x_t \geq S_t, \forall t \in [0, T]$$

其中, S_t 是一个给定的右边连续左边有极限, 并且拟左连续的实 $\mathcal{A}$ -适应过程, 且满足

$$\begin{aligned} E \sup_{t \in [0, T]} |S_t|^2 < \infty, \\ \exp(Y) \geq \liminf_{t \uparrow T} S_t \end{aligned}$$

S_t 通常被称为是一个给定的障碍 (对 RBSDE (7) 的解 (x_t, q_t, p_t, K_t) 中的 x_t 来说). 当 $S_t \equiv 0$ 时, 则 RBSDE (7) 的解 (x_t, q_t, p_t, K_t) 中的 $x_t \geq S_t = 0$ 是非负的.

现在假设条件 (A) 1°-4° 仍然成立, 进一步假设

(A) 5° S_t 是一个 Itô 过程, 且满足

$$\begin{aligned} S_t = S_0 + \int_0^t \xi_s ds + \int_0^t \eta_s dw_s + \\ \int_0^t \int_{\mathcal{Z}} \gamma_s(z) N_k(ds, dz) \end{aligned}$$

其中, S_0 是一个常数, 且有 $S_t^+ \leq k_0, \forall t \in [0, T]$, $k_0 > 0$ 是一个常数;

$$\begin{aligned} |\eta_s| + |\gamma_s(z)| \leq k_0; \\ E \left[\left(\int_0^T |\xi_s(\omega)|^2 ds \right)^2 \right] < \infty \end{aligned}$$

备注 若 $S_t \equiv S_0, \forall t \in [0, T]$, 其中 S_0 是常数满足 $x_T \geq S_0$, 则 S_t 满足 (A) 5° 。

由文[2] 中定理 69 与引理 59 的证明, 方程 (7) 存在惟一解 (x_t, q_t, p_t, K_t) , 且有:

引理 存在一个常数 $k_0 \geq 0$, 使得 $|x_t| \leq k_0, \forall t \in [0, T]$ 。

类似上述讨论, 但由 RBSDE 的比较定理^[2]、Girsanov 定理和极限定理, 以及 Ito 公式等等, 我们可以证明以下结论。兹证明从略。

定理 3 在 (A) 的 $1^\circ-5^\circ$ 条件下, 存在解 $(\tilde{y}_t, \tilde{q}_t, \tilde{p}_t, \tilde{k}_t) \in$

$S_{\mathcal{F}}^2 \times L^2(\mathcal{R}^{\times d}) \times F_{\mathcal{F}}^2(\mathbf{R}^1) \times \bigcup_{\mathcal{AC}}(\mathbf{R}^1)$,
($\bigcup_{\mathcal{AC}}(\mathbf{R}^1)$ 是所有实连续增且 $\mathcal{F}_t$ -适应的过程 f_t , 且 $f_0 = 0, f_T \in L^2$ 的集合)。

满足:

$$\begin{aligned} -d\tilde{y}_t &= b(t, \tilde{y}_t, \tilde{q}_t, \tilde{p}_t, \omega) - \tilde{q}_t dw_t - \\ &\int_{\mathcal{Z}} \tilde{p}_t(z) N_k(dt, dz) + dK_t, \\ \tilde{y}_T &= Y, \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} b(t, \tilde{y}, \tilde{q}, \tilde{p}, \omega) &= \\ \exp(-\tilde{y}) &b(t, \exp(\tilde{y}), \tilde{q} \exp(\tilde{y}), \\ (\exp(\tilde{p}(\cdot)) - 1) \exp(\tilde{y}), \omega) &+ \\ \frac{1}{2} |\tilde{q}|^2 - \int_{\mathcal{Z}} \tilde{p}(z) \Pi(dz) \end{aligned}$$

是关于 $\tilde{q}$ 为平方增长的系数, 且解 $\tilde{y}_t$ 是有界的, 即:

$$|\tilde{y}_t| \leq \max\{\ln(k_0), |\ln(r_0)|\}$$

在这个带跳 RBSDE 中, 系数是关于 $\tilde{q}$ 平方增长, 关于 $\tilde{p}$ 指数增长的! 与本文上节例子类似, 可作出关于定理 3 之例子, 为节省篇幅计, 兹从略。

参考文献:

[1] EL KAROUI N, PENG S, QUENEZ M C. Backward stochastic differential equations in finance [J] . Math Finance, 1997(7): 1—71.

[2] SITU R. Backward stochastic differential equations with jumps and applications [M] . Guangzhou: Guangdong Science and Technology Press, 2000.

[3] EL KAROUI N, ROUGE R. Contingent claims pricing via utility maximization[J] . Math Finance, 2000, 10(2): 259—276.

[4] KOBYLANSKI M. Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth[J] . The Annals of Probability, 2000, 28(2): 558—602.

[5] SITU R, YANG Y. Upcrossing inequality and strong g - supermartingales (I) [J] . Acta Sci Naturali Univ Sunyatseni, 2003, 42(5): 1—5. (In Chinese) .

[6] SITU R, YANG Y. Upcrossing inequality and strong g - supermartingales (II) [J] . Acta Sci Naturali Univ Sunyatseni, 2003, 42(6): 1—3. (In Chinese) .

On Solutions of BSDEs with Jumps and
with Coefficients Having a Quadratic Growth (I)

SITU Rong , HUANG Wei

(Department of Statistics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence of solutions to backward stochastic differential equations (BSDEs) and reflecting BSDEs with jumps and coefficients was established, which have a quadratic growth in q , an exponential growth in p , and an exponential growth in $-y$.

Key words: backward stochastic differential equations with jumps (BSDE); reflecting BSDE; quadratic growth coefficients; Ito's fomula; Girsanov theorem; existence theorem for solutions