

多期行为资产组合模型^{*}

潘雪阳

(中山大学岭南学院, 广东 广州 510275)

摘要: 扩展了 Shefrin 和 Statman (2000) 的 BPT 模型, 从一期投资扩展到多期投资。证明了在多期投资中每一期的最优投资策略类似于 Shefrin 和 Statman 的一期最优投资策略, 而总的风险概率在各期之间进行分配。还分析了行为资产组合理论中隐含的几个假设。

关键词: BPT; 单位概率; 状态价格

中图分类号: F83 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 01-0021-04

Shefrin 等^[1]发表了《行为资产组合理论》一文。在该文(以下简称 SS)中, 作者以 Roy (1952)^[2]的第一安全模型和 Lopes (1987)^[3]的 SP/A 理论为基础, 提出了单一心理帐户行为资产组合理论(single accounting behavior portfolio theory, BPT-SA)。

Roy (1952) 认为人们购买证券时会预先设定一个未来的最低收益水平, 如果未来真实收益低于这个最低水平, 就表示损失。人们构造资产组合时, 考虑的是如何最小化损失的概率, 即最小化真实收益低于预先给定最低收益的概率。不论未来收益呈何种分布, Roy 认为通过车比雪夫不等式可以找到损失概率的上限, 最小化这个概率上限就可以最小化损失概率。Shefrin 和 Statman (2000) 对此方法提出了批评。他们认为, 车比雪夫不等式是一个一般性的结论, 其中的等号部分并不总是成立。在很多情况下, 这个概率上限甚至大于 1, 此时最小化这个概率上限并没有达到最小化损失概率的目的。

Lopes (1987) 提出 SP/A 模型, S 代表安全, P 代表潜能, A 代表愿望。安全类似于 Roy 模型中的最低收益水平, 潜能表示投资者希望达到一个较高的收益水平, 愿望是一个一般性的概念, 可以有很多种不同的表现形式。SP/A 模型可以看作是 Roy 模型的推广。Lopes 认为, 如果人们对安全更加关注, 就会从心理上增加低收益水平的概率权重, 而减少高收益水平的概率权重。反之, 如果人们更加关注潜能, 就会减少低收益水平的概率权重, 增加

高收益水平的概率权重。通常人们都是既害怕损失又希望得到潜能的, 所以最后选择的概率是两种修正的主观概率加权求和的结果, 这个权重反映了损失与希望的权衡。

SS 在 Roy (1952) 和 Lopes (1987) 的基础上发展了 BPT-SA 模型。在该模型中, 人们预先设定了最低财富 A 和最大损失概率 $1-\alpha$ 。假设市场有 n 种状态, 通过在完全市场^[4]中, 对所有种状态的阿罗-德布鲁证券进行取舍, 完成对资产组合的选择, 以达到最大化期望财富。在该模型中, 对所有单位概率的状态价格(state price per unit probability) v_i/r_i 按降序进行排列, 其中 v_i 代表状态 i 的状态价格, r_i 代表状态发生的概率。作者证明, 这个模型中的最优选择是只购买序列中最后 t 种阿罗证券, 满足 $\sum_{i=n-t+1}^n \geq \alpha$, 对第 $n-t+1$ 种到第 $n-1$ 种阿罗证券, 每种购买 A 份, 剩余的都用于购买第 n 种阿罗证券。由于阿罗-德布鲁证券表示在其指定状态发生时支付 1 元, 而其他状态发生时支付 0 元, 因此此处及后文中, 阿罗证券的份数和其指定状态发生时的收益可以相互替代。该模型设定了 2 个最低量 A 和 α , 对初始财富 $W^{(0)}$ 就必须有个下限, 即

$$W^{(0)} \geq \sum_{i=n-t+1}^n v_i A$$

BPT-SA 模型只考虑 1 期的情形。如果投资期是无限的, 投资者在每期仍然采取 BPT-SA 策略, 那么最终财富将会变成零。因为没有投资的状态迟

* 收稿日期: 2004-01-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70273060)

作者简介: 潘雪阳(1979年生), 男, 博士研究生; E-mail: panxueyang@126.com

早会发生，这时就会损失掉所有财富。SS 中也提到了这一点，但作者并没有给出多期的行为资产组合模型。本文在这一点上做了扩展。

1 模 型

假设对任何时期 t 都存在同样的 n 个状态，每一状态价格是 v_i ，概率是 r_i ，各期之间相互独立。根据每单位概率的状态价格 v_i/r_i 按降序将 n 个状态重新排列。又假设市场上的证券只包括这 n 种状态的阿罗—德布鲁证券，投资者有 $W^{(0)}$ 的初始财富投资于其中。投资者的意愿是投资 T 期，每期的最小收益为 A ，整个投资期的损失概率不大于 $1-\alpha$ 。投资者希望在一个投资期中最大化各期期望收益的贴现和：

$$\text{Max} \sum_{t=1}^T (1+R)^{-t} E(W^{(T)}) \tag{1}$$

$$\text{s.t. } P(W^{(1)} \geq A, W^{(2)} \geq A, \dots, W^{(T)} \geq A) \geq \alpha \tag{2}$$

$$W^{(t-1)} = \sum_{i=1}^T v_i W_i^{(t)} \tag{3}$$

其中， R 表示无风险利率， $W^{(t)}$ 表示 t 期的收益， $E(W^{(t)}) = \sum_{i=1}^T r_i W_i^{(t)}$ ， $W_i^{(t)}$ 表示 $t-1$ 期投资于 t 期第 i 种状态的阿罗证券的份数， $W^{(t-1)}$ 表示 $t-1$ 期的实际收益。约束 (3) 表示每一期的实际收益都用以购买下一期的 n 种阿罗—德布鲁证券。 $W^{(t-1)}$ 表示 $t-1$ 期发生之后该期的实际收益，而前面的 $W^{(t)}$ 表示 $t-1$ 期看到的以后各期的理论收益，因此存在期望 $E(W^{(t)})$ 。

接下来讨论该问题的解。从约束条件看出，投资者对整个投资期所要求的安全（各期收益都大于最小收益 A ）的概率是 α ，每一期真实收益都投资于下一期的证券市场。根据 SS 的证明，可知对于一期市场，最优策略最多出现 3 种结果： 0 、 A 和一个大于 A 的量。那么对于多期投资中的每一期，最优投资策略仍然是这样的吗？我们首先考虑一个 2 期模型。

假设投资者第 1 期投资安全的概率是 a_1 ，第 2 期是 a_2 ；由于各期之间相互独立，故必须满足 $a_1 \cdot a_2 \geq \alpha$ 。第 2 期的最优策略就是 SS 中的策略，投资数量是第 1 期的真实收益。如果第 1 期也按照 SS 的策略投资，那么第 2 期投资量为 0 、 A 和大于 A 时，对应概率分布分别为 $1-a_1$ 、 a_1-r_n 、 r_n 。

如果改变第 1 期的投资策略，减少第 n 个状态的投资数量，增加其他状态的投资数量，这样做对期望收益的影响，可以通过对 SS 中的最优策略

做一个微调来具体说明。假设在最优策略中减少对最后一个状态 n 的投资 a 元（ a 很小，改变后仍然满足最小收益约束 A ），而把这 a 元投资于第 i 个状态， $t \leq i \leq n-1$ 。这时第 1 期中期望收益的变化量为 $\left[\frac{r_i}{v_i} - \frac{r_n}{v_n} \right] a$ ，不难看出，这个量小于 0，即做了微调之后，第 1 期的期望收益减少了。再看看这个改变对第 2 期投资的影响。由于增加了对 i 状态的投资，如果第 1 期中状态 i 最终发生，对第 2 期的投资就会增加 $\frac{a}{v_i}$ 元。第 1 期中第 n 个状态的投资减少了，如果此时状态 n 发生，对第 2 期的投资就会减少 $\frac{a}{v_n}$ 元，第 2 期最终的期望收益变化量为 $\left[\frac{a}{v_i} r_i - \frac{a}{v_n} r_n \right] \frac{r_n}{v_n}$ ，即 $a \left[\frac{r_i}{v_i} - \frac{r_n}{v_n} \right] \frac{r_n}{v_n}$ ，括号后面乘以 $\frac{r_n}{v_n}$ 表示第 1 期收益的变化量最后都是投资于第 2 期中的第 n 个状态。同样，第 2 期的最终收益的变化量小于零，也就是第 1 期的策略改变降低了第 2 期的期望收益，这个改变降低了 2 期总的期望收益。所以，对于 2 期市场而言，每期的最优策略类似于单期最优策略，只是所需要的每期的安全概率要更大一些。

现在考虑安全概率在各期之间怎样分配才会最优。假设 R 为零，则 2 期最大化问题就变为

$$\text{Max} \left[E(W^{(1)}) + E(W^{(2)}) \right]$$

对每期的状态进行投资，如果投资的状态数量越少，那么可以投资于第 n 种状态的数量越多，从而期望收益就越大。上述最大化收益问题就转化为最小化各期间安全概率的和，即

$$\begin{aligned} \text{Min} & (\alpha_1 + \alpha_2) \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_1 \cdot \alpha_2 \geq \alpha \end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) 的解为 $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\alpha}$ 。所以在 R 等于 0 的 2 期模型中，只有平均分配各期间的最大损失概率 $1-\sqrt{\alpha}$ ，每期的投资策略跟单期投资策略一样，即可最大化 2 期的总收益了。

如果 R 大于 0，第 2 期的收益必须经过 1 期贴现才能等价于第 1 期的收益，这时通过适当增加第 2 期的安全概率，减少第 1 期的安全概率，就会增加第 1 期而减少第 2 期的收益水平。因为增加安全概率必须减少对第 n 种状态的投资，把节省出来的部分投资到具有更高每单位概率状态价格的状态。为了最大化总收益，必须满足当安全概率在 2 期之间有一个微小的变化时，第 2 期减少的期望收益贴现到第 1 期时等于第 1 期增加的期望收益^[5]。

即

$$\frac{1}{1+R}\left[\frac{A\Delta\alpha}{v_n}r_n-\frac{A\Delta\alpha}{v_{t_2}}r_{t_2}\right]=\frac{A\Delta\alpha}{v_n}r_n-\frac{A\Delta\alpha}{v_{t_1}}r_{t_1}\tag{5}$$

其中 t_2 表示第 2 期增加安全概率之后必须投入资本 A 的状态, t_1 表示第 1 期减少安全概率后不再投资的一个状态。式 (5) 的左边表示当安全概率增加一个微小的量 $\Delta\alpha$ 时, 第 2 期减少的期望收益; 式 (5) 右边表示安全概率增加一个微小的量 $\Delta\alpha$, 第 1 期增加的期望收益。将式 (5) 进行变换得

$$\frac{1}{1+R}\left[\frac{r_n}{v_n}-\frac{r_{t_2}}{v_{t_2}}\right]=\frac{r_n}{v_n}-\frac{r_{t_1}}{v_{t_1}}\tag{6}$$

其中, $\sum_{i=t_2}^n r_i = \alpha_2$, $\sum_{i=t_1}^n r_i = \alpha_1$ 。对于式 (6), 无法得到关于 α_1 和 α_2 的显式解。但通过变换, 可得 $\frac{v_{t_2}}{r_{t_2}} > \frac{v_{t_1}}{r_{t_1}}$, 即在 n 个降序排列的状态中, t_1 比 t_2

更靠近第 n 个状态, 从而 α_2 比 α_1 大, 即第 2 期的安全概率比第 1 期大。而且 R 越大, α_1 和 α_2 之间的差就越大。

对于大于 2 期的情形, 也可以用相同的方法进行分析。结论是, 每一期的最优选择都相同。对于安全概率在每一期之间的分配, 如果 R 为 0, 那么每一期都要承担相同的风险 $1-\sqrt[n]{\alpha}$, 即每期的安全概率都是 $\sqrt[n]{\alpha}$; 如果 R 大于 0, 那么风险在各期之间的分配情况是, 随着时间的增加, 安全概率也增加, 即各期承担的风险是随着时间减少的, 而且 R 越大, 变化的幅度越大。

2 变量关系

首先考虑 W_0 必须满足的条件。由于多期投资模型中每一期的投资全部来自于上一期的实际收益, 所以 $W^{(0)}$ 只需要能够满足第 1 期的投资需要即可:

$$W^{(0)} \geq \sum_{i=t_1}^n Av_i\tag{7}$$

其中 $\sum_{i=t_1}^n r_i \geq \alpha_1$, α_1 是第 1 期的安全概率。我们可以看出初始财富 $W^{(0)}$ 限制了最小收益水平 A 和安全概率 α 的选择。如果 A 太大, α 就必须选择一个相对小的量; 如果对 α 要求很高, 那么就必须要有个较小的 A 。

考虑当 $T \rightarrow \infty$ 时的情形。根据关于安全概率在各期进行分配的问题的讨论, 如果 R 为 0, 风险概率 $1-\sqrt[n]{\alpha} \rightarrow 0$, 即每一期的最优资产组合就是购买所有状态的阿罗证券; 如果 R 大于 0, 由于最优选择是风险在各期之间进行分配, 并且期限是无穷期, 那么各期分配的风险概率仍然是零。即, 不论 R 是否为零, 对于无穷期投资而言, 最优策略是每一期都购买所有的阿罗证券。由状态价格组成的向量 $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 就是定价支持向量^[6], 具有性质

$$\sum_{i=1}^n v_i = \frac{1}{1+R}\tag{8}$$

根据 (7), 可以得到 $W_0 \geq \frac{A}{1+R}$, 即 $A \leq (1+R)W_0$ 。也就是如果要投资于所有的状态 (即得到绝对安全的收益), 那么最小收益水平不能大于无风险收益水平, 这与无套利原理相符合, 获得超额收益必须以承担相应风险为代价。

3 隐含假设

在行为资产组合模型的证明中, 假设每单位概率的状态价格 v_i/r_i 不相同, 因而可以按照降序排列。SS 中没有给予该假设更多的讨论, 但这里我们需要对它作进一步讨论。每单位概率的状态价格中, 概率 r_i 是交易者个人的主观概率, 而非客观概率。状态价格组成的向量 $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 是定价支持向量, 状态价格与无风险概率的乘积 $v_i(1+R)$ 就是鞅概率。如果交易者的主观概率 r_i 正好等于鞅概率, 那么 $v_i/r_i = 1/(1+R)$ 对所有的状态 i 都成立。这就无法区分各种状态的优劣, 行为资产组合理论对于该交易者是无效的。即使交易者的每单位概率的状态价格不完全相等, 但是只要对于最后的 T 种状态, 每单位概率的状态价格相等, 而且 $\sum_{i=n-T}^n r_i > \alpha$, 那么对于这个交易者而言, 行为资产组合理论仍然无效。

我们还需要对状态价格做更多的讨论。在 Shefrin 和 Statman 于 1994 年发表的另一篇文章^[7]中, 作者对状态价格的产生做了详细的论述, 并且推导出了无风险利率公式。设 $v(x_i)$ 表示下一期的状态 x_i 的状态价格, $\Pi(x_i)$ 表示代表性交易者对状态 x_i 的主观概率, $\rho(x_i)$ 表示状态 x_i 发生时市场组合的收益率, 则

$$v(x_i) = \Pi(x_i)\rho^{-1}(x_i)$$

根据式 (8), 无风险利率的表达式

$$1 + R = 1 \setminus \sum_i r(x_i) = \frac{1}{\sum_i \Gamma(x_i) \rho^{-1}(x_i)} = \left(E \left[\rho^{-1}(x_i) \right] \right)^{-1}$$

其中， E_r 表示以代表性交易者的主观概率作为概率测度的期望。不难看出，鞅概率（或者风险中性概率） $\pi(x_i)$ 是与代表性交易者的主观概率和市场收益率有关的函数，即

$$\pi(x_i) = r(x_i)(1 + R) = \frac{\Gamma(x_i) \rho^{-1}(x_i)}{E \left[\rho^{-1}(x_i) \right]}$$

如果市场组合的收益率对下一期的任何状态都是常数，即 $\rho(x_i) \equiv \rho$ ，那么鞅概率就等于代表性交易者的主观概率， $\pi(x_i) = \Gamma(x_i)$ 。这时，行为资产组合理论对代表性交易者来说就是无效的。而假设所有的交易者都具有相同的主观概率，那么每个交易者都是代表性交易者，那么对于该证券市场而言，行为资产组合理论是不可取的。所以在市场组合收益率不随状态变化的情况下，行为资产组合理论有效的一个必要条件是交易者不能具有相同的主观概率。

4 结 论

本文扩展了 Shefrin 和 Statman 的行为资产组合理论，从一期投资扩展到了多期投资。证明了在多期投资中每一期的最优投资策略类似于 Shefrin 和

Statman 的一期最优投资策略，而总的风险概率 $1 - \alpha$ 在各期之间进行分配。如果 R 等于零，风险在各期间进行均匀分配。如果 R 不等于零，风险概率的分配没有显式解，但从定性分析可以得到，越靠前的时期，承担的风险概率越大。本文还分析了行为资产组合理论中的隐含假设。

致谢：作者感谢导师王美今教授对本文提出的宝贵意见。

参考文献:

[1] SHEFRIN H, STATMAN M. Behavioral portfolio theory[J]. J Financial Quantitative Analysis 2000 35: 127—151.
[2] ROY A D. Safety first and holding of assets [J]. Econometrica, 1952 20: 431—449.
[3] LOPES L L. Between hope and fear: the psychology of risk [J]. Advances in Experimental Social Psychology, 1987, 20: 255—295.
[4] 蒋殿春. 现代金融理论[M]. 上海: 上海人民出版社. 2001: 96—121.
[5] 龚六堂. 经济学中的优化方法[M]. 北京: 北京大学出版社. 2000: 26—44.
[6] INGSERSOLL J. Theory of financial decision making[M]. New York: Rowman & Littlefield Publishers Inc. 1987: 45—64.
[7] SHEFRIN H, STATMAN M. Behavioral capital asset pricing theory[J]. J Financial and Quantitative Analysis 1994 29: 323—349.

Multi period Behavioral Portfolio Model

PAN Xue yang

(Lingnan College, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The BPT model of Shefrin and Statman (2000) is extended from single period to multi period. It's proved that the optimal strategy of the traders in every period of multi period model is analogous to that of Shefrin and Statman's single period model. In multi period model, the total risk distributes in all periods. This paper also analyzes some hypotheses implied in behavioral portfolio models.

Key words: BPT; probability per unit; state price