

一类多项式系统代数分类的一般方法*

桑波, 朱思铭

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 利用多项式代数方程的判别系统理论和结式理论, 讨论了具有星形结点的一类对称四次系统的代数分类, 并对系统进行全局分析。值得指出的是, 这一方法适用于具有星形结点的一般多项式微分系统。

关键词: 奇点; 星形结点; 多项式微分系统; 相图

中图分类号: O175.1.13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 04-0009-04

1 研究背景

文[1]利用代数不变式理论讨论了齐三次系统, 得到了系统的代数分类和全局相图。文[2]利用[1]的代数分类讨论了具有星形结点的一类三次系统, 得到了系统的代数分类和全局相图, 并指出具有星形结点的奇数次系统和偶数次系统的研究方法大不相同。文[3, 4]利用扇形分类法分别讨论了具有星形结点的一类四次系统和五次系统, 得到了部分全局相图。由于代数方程判别系统理论^[5,6]的出现, 使得研究具有星形结点的高次多项式微分系统的代数分类成为可能。

本文利用多项式代数方程判别系统理论和结式理论, 讨论了形如

$$\begin{cases} x' = x + P_4(x, y) \\ y' = y + Q_4(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

的代数分类, 其中

$$P_4(x, y) = a_1 x^3 y + a_3 x y^3, Q_4(x, y) = b_0 x^4 + b_2 x^2 y^2 + b_4 y^4, b_4 \neq a_3$$

该系统具有星形结点, 以纵轴为积分直线, 且向量场关于纵轴对称。需要特别指出的是, 这一方法可以给出具有星形结点的多项式微分系统

$$\begin{cases} x' = x + P_n(x, y) \\ y' = y + Q_n(x, y) \end{cases}$$

(其中 $P_n(x, y), Q_n(x, y)$ 为关于 x, y 的 n 次齐次多项式) 代数分类的系数条件, 不论 n 的奇偶性。之所以讨论具有星形结点的一类对称四次系统, 只是为了阐释方法的方便。

2 奇点分析

作庞加莱第一变换^[7,8] $x = 1/z, y = u/z, \tau = 1/z^3 t$, 系统(1)变为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = b_0 + (b_2 - a_1)u^2 + (b_4 - a_3)u^4 = f(u) \\ \frac{dz}{d\tau} = -z(z^3 + a_1 u + a_3 u^3) \end{cases} \quad (2)$$

作庞加莱第二变换 $x = v/z, y = 1/z, \tau = 1/z^3 t$, 系统(1)变为

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = (a_3 - b_4)v + (a_1 - b_2)v^3 - b_0 v^5 = g(v) \\ \frac{dz}{d\tau} = -z(z^3 + b_4 + b_2 v^2 + b_0 v^4) \end{cases} \quad (3)$$

以下记 $p(u) = P_4(1, u)$ 。

引理1 若 $u = u_0$ 为 $f(u) = 0$ 的单根, 则 $(u_0, 0)$ 为系统(2)的鞍点、结点或鞍结点。

证明 若 $u = u_0$ 为 $f(u) = 0$ 的单根, 则系统(2)在 $(u_0, 0)$ 处一次近似矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} f'(u_0) & 0 \\ 0 & -p(u_0) \end{bmatrix}$$

当 $p(u_0)f'(u_0) > 0, (u_0, 0)$ 为鞍点; 当 $p(u_0)f'(u_0) < 0, (u_0, 0)$ 为结点; 当 $p(u_0) = 0, f'(u_0) > 0$ 时, 原点为上鞍下结型鞍结点; 当 $p(u_0) = 0, f'(u_0) < 0$ 时, 原点为上结下鞍型鞍结点。

引理2 若 $u = u_0$ 为 $f(u) = 0$ 的2重根或4重根, 则 $(u_0, 0)$ 为系统(2)的鞍结点。

证明 若 $u = u_0$ 为 $f(u) = 0$ 的二重根, 则系统(2)在 $(u_0, 0)$ 处一次近似矩阵为

* 收稿日期: 2004-09-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371135)

作者简介: 桑波 (1976年生), 男, 博士生; E-mail: sangbo-76@yahoo.com.cn

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -p(u_0) \end{bmatrix}$$

当 $p(u_0)f^{(2)}(u_0) > 0$, $(u_0, 0)$ 为右鞍左结型鞍结点; 当 $p(u_0)f^{(2)}(u_0) < 0$, $(u_0, 0)$ 为右结左鞍型鞍结点; 若 $p(u_0) = 0$, 考虑 $\frac{dz}{d\tau}|_{u=u_0} = -z^4 - p(u_0)z = -z(z^3 + p(u_0))$, 它有 2 个不动点 $z_1 = 0, z_2 = -\sqrt[3]{p(u_0)}$. 令 $\lambda = p(u_0)$, 在 $\lambda = 0$ 的两侧, 2 个不动点的稳定性发生交换, 一维系统在 $\lambda = 0$ 处发生跨临界分支。所以, 当 $p(u_0) = 0$, $f^{(2)}(u_0) > 0$ 时, $(u_0, 0)$ 为鞍结点, 第一、三象限为双曲扇形, 第二、四象限为抛物扇形; 当 $p(u_0) = 0, f^{(2)}(u_0) < 0$ 时, $(u_0, 0)$ 为鞍结点, 第一、三象限为抛物扇形, 第二、四象限为双曲扇形。

对于 $u = u_0$ 为 4 重根的情形可以类似讨论。

引理 3 原点为系统(3)的鞍点、结点或鞍结点。

引理 3 的证明和引理 1 类似, 这里只叙述结论。当 $b_4(a_3 - b_4) > 0$ 时, 原点为鞍点; 当 $b_4(a_3 - b_4) < 0$ 时, 原点为结点; 当 $b_4 = 0, (a_3 - b_4) > 0$ 时, 原点为上鞍下结型鞍结点; 当 $b_4 = 0, (a_3 - b_4) < 0$ 时, 原点为上结下鞍型鞍结点。

引理 4 若 $f(u_0) = 0$, 令 $x_0 = \frac{-1}{\sqrt[3]{p(u_0)}}$, 则

(1) 若 $u = u_0$ 为 $f(u)$ 的单根, 则当 $p(u_0)f'(u_0) < 0$ 时, $(x_0, u_0 x_0)$ 为鞍点; 当 $p(u_0)f'(u_0) > 0$ 时, $(x_0, u_0 x_0)$ 为结点。

(2) 若 $u = u_0$ 为 $f(u)$ 的 k ($k = 2, 4$) 重根, 则当 $p(u_0)f^{(k)}(u_0) < 0$ 时, $(x_0, u_0 x_0)$ 为上鞍下结型鞍结点; 当 $p(u_0)f^{(k)}(u_0) > 0$ 时, $(x_0, u_0 x_0)$ 为上结下鞍型鞍结点。

证明 证明过程与引理 1、引理 2 类似。

引理 5 设 $b_4 \neq 0$, 则 $(0, \frac{-1}{\sqrt[3]{b_4}})$ 为系统(1)的奇点, 当 $b_4(a_3 - b_4) > 0$ 时, 该奇点为结点; 当 $b_4(a_3 - b_4) < 0$ 时, 该奇点为鞍点。

证明 证明过程与引理 1 类似。

3 $f(u)$ 和 $p(u)$ 的公共实数解

考虑多项式 $h = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$), 由多项式方程的判别系统理论^{5,6}, h 的判别式序列为 $D_1 = 1, D_2 = -ab, D_3 = -ab(b^2 - 4ac), D_4 = ac(b^2 - 4ac)^2$. 由此不难得到它的完全分类:

(1) h 有 4 个互异实根当且仅当 $ab < 0, ac >$

$0, b^2 - 4ac > 0$.

(2) h 有 3 个互异实根, 其中之一为二重当且仅当 $ab < 0, c = 0$.

(3) h 有 2 个互异实根和一对共轭复根当且仅当 $ac < 0$.

(4) h 有 2 个互异二重实根当且仅当 $ab < 0, bc < 0, b^2 - 4ac = 0$.

(5) h 有一个 4 重实根当且仅当 $b = c = 0$.

(6) h 有一个 2 重实根和一对共轭复根当且仅当 $ab > 0, c = 0$.

(7) h 无实根当且仅当 $b^2 - 4ac < 0$ 或 $ab > 0, ac > 0, b^2 - 4ac \geq 0$.

显然, 当 $f(u)$ 和 $p(u)$ 有公共实数解 $u = u_0$ 时, 系统(1)在直线 $y = u_0 x$ 上无异于原点的有限远奇点。由 $\text{res}(f, p) = b_0(a_3^2 b_0 - a_1 b_2 a_3 + a_1^2 b_4)^2$, 不难得到如下引理。

引理 6 令 $A = a_3^2 b_0 - a_1 b_2 a_3 + a_1^2 b_4$, 则

(1) $f(u)$ 和 $p(u)$ 只有一个公共实数解 $u = 0$, 当且仅当 $b_0 = 0, A \neq 0$ 或 $b_0 = A = 0, a_1 a_3 \geq 0$ 且 $a_1^2 + a_3^2 \neq 0$.

(2) $f(u)$ 和 $p(u)$ 的公共实数解为 $f(u)$ 的实数解, 当且仅当 $a_1 = a_3 = 0$.

(3) $f(u)$ 和 $p(u)$ 有 3 个互异公共实数解 $u_1 = 0, u_2, u_3$ ($u_3 = -u_2$), 当且仅当 $b_0 = A = 0, a_1 a_3 < 0$.

(4) $f(u)$ 和 $p(u)$ 有 2 个互异公共实数解 u_1, u_2 ($u_2 = -u_1$), 当且仅当 $b_0 \neq 0, a_1 a_3 < 0, A = 0$.

(5) $f(u)$ 和 $p(u)$ 无公共实数解, 当且仅当 $b_0 \neq 0, A = 0, a_1 a_3 \geq 0$ 且 $a_1^2 + a_3^2 \neq 0$ 或 $b_0 A \neq 0$.

4 代数分类

令 $a = b_4 - a_3, b = b_2 - a_1, c = b_0$. 根据特征方程的完全分类, 并讨论 $f(u)$ 和 $p(u)$ 公共实数解的个数, 得到如下定理。

定理 系统(1)可以分为:

(1) $f(u)$ 有 4 个互异实根

① $f(u)$ 和 $p(u)$ 无公共实数解当且仅当 $ab < 0, ac > 0, b^2 - 4ac > 0, A \neq 0$.

② $f(u)$ 和 $p(u)$ 有 2 个公共实数解当且仅当 $ab < 0, ac > 0, b^2 - 4ac > 0, A = 0, a_1 a_3 < 0$.

③ $f(u)$ 和 $p(u)$ 有 4 个公共实数解当且仅当 $ab < 0, ac > 0, b^2 - 4ac > 0, a_1 = a_3 = 0$.

(2) $f(u)$ 有 3 个互异实根, 其中 1 个为 2 重

① $f(u)$ 和 $p(u)$ 有一个公共实数解当且仅当 $ab < 0, c = 0, A \neq 0$ 或 $ab < 0, c = 0, a_1 = 0, a_3 \neq$

0。

② $f(u)$ 和 $p(u)$ 有 3 个公共实数解当且仅当 $ab < 0, c = 0, A = 0, a_1 a_3 < 0$ 或 $ab < 0, c = 0, a_1 = a_3 = 0$ 。

(3) $f(u)$ 有 2 个互异实根和 1 对共轭复根

① $f(u)$ 和 $p(u)$ 无公共实数解当且仅当 $ac < 0, A = 0, a_1 a_3 > 0$ 或 $ac < 0, A \neq 0$ 。

② $f(u)$ 和 $p(u)$ 有 2 个公共实数解当且仅当 $ac < 0, A = 0, a_1 a_3 < 0$ 或 $ac < 0, a_1 = a_3 = 0$ 。

(4) $f(u)$ 有 2 个 2 重实根

① $f(u)$ 和 $p(u)$ 无公共实数解当且仅当 $ab < 0, bc < 0, b^2 - 4ac = 0, A \neq 0$ 。

② $f(u)$ 和 $p(u)$ 有 2 个公共实数解当且仅当 $ab < 0, bc < 0, b^2 - 4ac = 0, A = 0, a_1 a_3 < 0$ 或 $ab < 0, bc < 0, b^2 - 4ac = 0, a_1 = a_3 = 0$ 。

(5) $f(u)$ 有一个 4 重实根

$f(u)$ 和 $p(u)$ 有一个公共实数解当且仅当 $b = c = 0$ 。

(6) $f(u)$ 有一个二重实根和一对共轭复根

$f(u)$ 和 $p(u)$ 有一个公共实数解当且仅当 $ab > 0, c = 0$ 。

(7) $f(u)$ 无实根当且仅当 $b^2 - 4ac < 0$ 或 $ab > 0, ac > 0, b^2 - 4ac \geq 0$ 。

证明 只证(1), 其它情形证明过程类似。②、③中的条件相容, 显然成立。考虑①, 往证 $ab < 0, ac > 0, b^2 - 4ac > 0$ 与 $A = 0, a_1 a_3 \geq 0$ 且 $a_1^2 + a_3^2 \neq 0$ 不相容。

$$A = b_0 a_3^2 - a_1 b_2 a_3 + a_1^2 b_4 = ca_3^2 - ba_1 a_3 + aa_1^2$$

当 $ab < 0, ac > 0, b^2 - 4ac > 0, a_1^2 + a_3^2 \neq 0$ 时, 由 $A = 0$ 得 $a_1 a_3 < 0$ 。

例 1 考虑系统

$$\begin{cases} x' = x + x^3 y + \frac{-3+\sqrt{5}}{2} xy^3 \\ y' = y + x^4 - 2x^2 y^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} y^4 \end{cases}$$

这里 $f(u) = u^4 - 3u^2 + 1, p(u) = u(1 + \frac{-3+\sqrt{5}}{2} u^2)$ 。根据定理知 $f(u)$ 有 4 个互异实根 $\pm u_1, \pm u_2 (u_1, u_2 > 0)$, $f(u)$ 和 $p(u)$ 有 2 个公共实数解, 记为 $\pm u_1$, 则 $u_1^2 = \frac{-a_1}{a_3} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 由韦达定理, $u_2^2 = \frac{c}{a} \cdot \frac{-a_3}{a_1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 。在直线 $y = \pm u_1 x$ 上系统无异于原点的有限远奇点, 在直线 $y = \pm$

$u_2 x$ 上系统各有一个异于原点的有限远奇点, 在纵轴上有一个异于原点的有限远奇点 $(0, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}})$, 由引理 1-引理 5, 系统的全局相图见图 1。

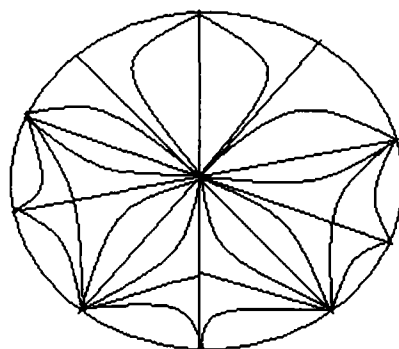


图 1 例 1 的全局相图

Fig.1 Global phase portrait of example 1

例 2 考虑系统

$$\begin{cases} x' = x + x^3 y + xy^3 \\ y' = y + x^4 - x^2 y^2 + 2y^4 \end{cases}$$

这里, $f(u) = u^4 - 2u^2 + 1, p(u) = u(1 + u^2)$ 。由定理知 $f(u)$ 有 2 个 2 重实根 1 和 -1, $f(u)$ 和 $p(u)$ 无公共实数解。所以直线 $y = \pm x$ 各有一个异于原点的有限远奇点, 考虑到 $p(1) = -p(-1) > 0, b_4 < 0$, 由引理 1-引理 5, 系统的全局相图见图 2。

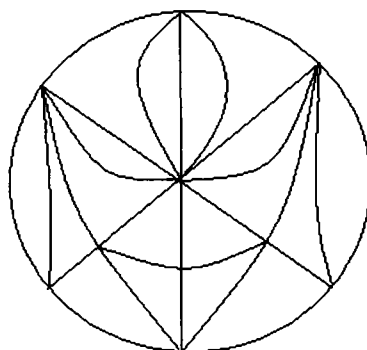


图 2 例 2 的全局相图

Fig.2 Global phase portrait of example 2

对于 $b_4 = a_3$ 的情形, 由于相对简单, 不予考虑。以上讨论了一类具有星形结点且关于纵轴对称的 4 次系统, 对于关于横轴对称的情形可以类似地讨论。

参考文献:

- [1] CIMA A, LLIBRE J. Algebraic and topological classification of the homogenous cubic vector fields in the plane[J]. Journal of

- Mathematical Analysis and Applications, 1990, 147: 420 - 448.
- [2] LI J M, CAI S L. Global analyses of a class of cubic systems [J]. Acta Math Sinica, 1997, 13: 207 - 220.
- [3] 杨殿武. 具有星形结点的一类平面四次系统的全局结构(I)[J]. 数学物理学报, 1996, 16(3): 263 - 268.
- [4] 姚卫红, 尚德生, 余敏杰. 具有星形结点的平面五次系统的全局分析[J]. 数学物理学报, 2003, 23A(2): 193 - 207.
- [5] 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性方程组与定理机器证明[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1996.
- [6] 王东明. 消去法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [7] 梁肇军. 多项式微分系统全局分析导引[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1989.
- [8] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 常微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

General Algebraic Classification Method for a Class of Polynomial Systems

SANG Bo, ZHU Si-ming

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: By complete discrimination system of polynomial algebraic equation and resultant theory, a symmetry class of quartic systems with stellar node is studied. An algebraic classification of the systems is given, and the global phase portraits of systems are studied. It is worth pointing out that this method can be applied to a kind of polynomial systems with stellar nodes.

Key words: singular point; stellar node; polynomial differential systems; phase portrait

(上接第3页)

On π -Quasinormally Embedded Subgroups and the p -Nilpotency of Finite Groups

WEI Hua-quan^{1,2}, LU Ruo-fei³, LIU Xiao-lei⁴

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Guangxi Teacher's College, Nanning 530001, China;

3. Department of Mathematics, Guangxi Institute for the Nationalities, Nanning 530006, China;

4. Department of Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, China)

Abstract: By investigating some special prime divisors of the order of groups and using the π -quasinormally embedding of second maximal subgroups of Sylow subgroups, it is obtained: let H be a normal subgroup of finite group G such that G/H is a p -nilpotent group and let P be a Sylow p -subgroup of H , where p is a prime divisor of $|G|$. If every 2-maximal subgroup of P is π -quasinormally embedded in G and one of the following conditions holds, then G is a p -nilpotent group: (1) $(|G|, p^2 - 1) = 1$; (2) $N_G(P)/C_G(P)$ is a p -group.

Key words: finite group; p -nilpotent; π -quasinormally embedded