

纯整环并半环上的同余对^{*}

周媛兰¹, 郭聿琦², 王正攀²

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275;

2. 西南大学数学系, 重庆 400715)

摘 要: 不同于正则半群中的方法研究同余, 为了刻画纯整环并半环上的同余, 定义了纯整环并半环上的同余对. 对纯整环并半环上的同余进行了研究, 得到了纯整环并半环上关于同余和同余对的一些结果. 主要结论是: 纯整环并半环上的每个同余都被其上的同余对所唯一确定.

关键词: 纯整环并半环; 同余; 同余对

中图分类号: O152.7; O153.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 06-0008-03

1 研究背景

一个半环 $(S, +, \circ)$ 指的是一个代数系统, 由一个非空集合 S , 2 个二元运算 $+$ 和 $\circ$ 组成, 使得 $(S, +)$ 和 $(S, \circ)$ 是 2 个半群, 且具有类似环的乘法对加法的分配律(即, 对任意的 $x, y, z \in S$, $x(y+z) = xy+xz$, $(y+z)x = yx+zx$). 半环 S 的一个元素 a 称为幂等元, 如果 $aa = a + a = a$. 若 S 中的每个元素均是幂等元, 称 S 为一个幂等元半环. 若对幂等元半环 S 中的任意元素 a, b , $a+ab+a = a$, $a+ba+a = a$ 均成立, 称 S 为一个带半环(见文[1, 2]). 带半环 S 称为 T 带半环, 若 $(S, +)$ 是一个 T 带^[1, 2].

设 A 是一类半环. 一个半环 S 称为一些 A 半环的分配格, 如果存在 S 上的同余 ρ , 使得 S/ρ 是一个分配格且每个 ρ -类是属于 A 的 S 的子半环. 称一个半环 S 为一个 Clifford 半环, 若 S 是环的分配格. 设 U 为 S 的一个子半环. 记 S 上的关系 P 在 U 上的限制为 $P|_U$. 分别记 S 上所有的同余关系和加法幂等元的集合为 $C(S)$, $E^+(S)$. S 上的一个同余 ρ 是幂等元分离的, 如果对任意的 $e, f \in E^+(S)$, 由 $e \rho f$ 可推出 $e=f$.

完全正则半群是群的并. 类似于完全正则半群, Pastijn 和郭聿琦^[3] 研究了环的并的半环. 与半群不同的是, 环的并未必是环的无交并. 环的无交并的半环 S 称为纯整环并半环, 若 $E^+(S)$ 是一个带半环. 容易证明一个左正则带半环 $L = \bigcup_{\alpha \in D} L_\alpha$, 一个 Clifford 半环 $T = \bigcup_{\alpha \in D} T_\alpha$ 和一个右正则带半环

$R = \bigcup_{\alpha \in D} R_\alpha$ 的相对于分配格 D 的织积是一个纯整环并半环. 反之, 每个纯整环并半环 S 均是这样的织积. 称 T 为纯整环并半环 S 的 Clifford 分支. 记 $S_\alpha = L_\alpha \times T_\alpha \times R_\alpha$, 其中 L_α 是一个左零带半环, T_α 是一个含零元 0_α 的环, R_α 是一个右零带半环. 因此, S_α 中的元素都可以写成这种形式: (i, a, λ) , 其中 $i \in L_\alpha$, $a \in T_\alpha$, $\lambda \in R_\alpha$. 对任意的 $a \in T_\alpha$ 和满足 $\alpha \leq \beta$ 的 $\alpha, \beta \in D$. 我们定义一个映射 $\varphi_{\alpha, \beta}$ 如下:

$$\varphi_{\alpha, \beta}: T_\alpha \rightarrow T_\beta, a \mapsto 0_\beta + a + 0_\beta$$

容易证明当 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ 时, 有 $\varphi_{\alpha, \alpha} = 1_{S_\alpha}$ 且 $\varphi_{\alpha, \beta} \varphi_{\beta, \gamma} = \varphi_{\alpha, \gamma}$ 成立. 如果 $a \in T_\alpha$, $r \in T_\gamma$ 且 $\alpha \leq \beta$, 那么

$$(a \varphi_{\alpha, \beta}) r = (0_\beta + a + 0_\beta) r =$$

$$0_\beta r + ar + 0_\beta r = 0_\beta r + ar + 0_\beta r = (ar) \varphi_{\alpha, \gamma}$$

即, $(ar) \varphi_{\alpha, \beta \gamma} = (a \varphi_{\alpha, \beta}) r$. 类似地, $(ra) \varphi_{\alpha, \beta \gamma} = r(a \varphi_{\alpha, \beta})$.

郭聿琦等^[4] 给出了左 C -半群的结构刻画. 为了讨论左 C -半群上的同余, 朱聘瑜教授等^[5] 给出了左 C -半群上的同余对的定义. 值得注意的是, 文[5]中定义的同余对不同于文[6]中正则半群上同余对的定义. 本文主要借助文[5]的思想, 给出纯整环并半环上的同余对的定义, 并且利用纯整环并半环上的同余对来刻画纯整环并半环上的同余. 本文未给出的概念和记号参见文献[6~8].

2 纯整环并半环上的同余对

在这一节中, 除非特别指出, S 均表示一个纯

* 收稿日期: 2004-12-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471112)

作者简介: 周媛兰 (1974年生), 女, 讲师; E-mail: ylzhou185@163.com

整环并半环。

设 ρ 是 S 上的一个同余。类似于半群, 分别称 $\{x \in S \mid (\exists e \in E^+(S)) x \rho e\}$ 和 $\rho|_{E^+(S)}$ 为 ρ 的核和 ρ 的迹。分别记它们为 $\ker \rho$, $\text{tr} \rho$ 。根据文[6], 我们知道如果 S 是一个纯整环并半环, 那么

$$\ker \rho = \bigcup_{\alpha \in D} \{(i, a, \lambda) \in S_\alpha \mid (i, a, \lambda) \rho (i, 0_\alpha, \lambda)\}$$

现在, 我们利用 $\ker \rho$ 的体现和 ρ 的迹描述 S 上的同余。我们将看到, 在很大程度上跟半群上的用核和迹来描述同余不同。首先考虑 $\ker \rho$ 在 S 的 Clifford 分支 T_S 上的体现。容易证明下面的定理。

定理 1 设 ρ 是 S 上的一个同余。定义一个集合如下:

$$N_\alpha(\rho) = \{a \in T_\alpha \mid (\exists i \in L_\alpha, \lambda \in R_\alpha), \\ (i, a, \lambda) \rho (i, 0_\alpha, \lambda)\}$$

记 $K_\rho = \bigcup_{\alpha \in D} N_\alpha(\rho)$ 。则以下结论成立:

- (1) $N_\alpha(\rho) = \{a \in T_\alpha \mid (\forall i \in L_\alpha, \lambda \in R_\alpha), (i, a, \lambda) \rho (i, 0_\alpha, \lambda)\}$ 。
- (2) $N_\alpha(\rho)$ 是 T_α 的一个理想。
- (3) K_ρ 是 T_S 的一个理想。
- (4) 若 $a, b \in T_\alpha, i \in L_\alpha, \lambda \in R_\alpha$, 则 $(i, a, \lambda) \rho (i, b, \lambda)$ 当且仅当 $b - a \in N_\alpha(\rho)$ 。
- (5) 若 $\alpha, \beta \in D (\alpha \leq \beta)$, $(i, 0_\alpha, \lambda) \rho (j, 0_\beta, \mu)$, 则 $N_\beta(\rho) \varphi_{\alpha\beta}^{-1} \subseteq N_\alpha(\rho)$ 。
- (6) 映射 $\rho \rightarrow N_\alpha(\rho)$ 是一个从 S 的同余格 $L(C(S))$ 到 T_α 的理想格 $L(I(T_\alpha))$ 的完备的 $\cap$ 同态。

现在给出确定纯整环并半环 S 上的同余相等的一种方法。为此, 需要下面的引理。

引理 1 设 ρ 是 S 上的一个同余。令 $(i, a, \lambda) \in S_\alpha, (j, b, \mu) \in S_\beta$ 。则 $(i, a, \lambda) \rho (j, b, \mu)$ 当且仅当 $(i, 0_\alpha, \lambda) \rho (j, 0_\beta, \mu), -a \varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b \varphi_{\beta, \alpha+\beta} \in N_{\alpha+\beta}(\rho)$ 。

证明 若 $(i, a, \lambda) \rho (j, b, \mu)$, 则有 $(i, 0_\alpha, \lambda) \rho (j, 0_\beta, \mu)$ 且 $(i, a, \lambda) + (i, -a, \lambda) \rho (j, b, \mu) + (i, -a, \lambda)$ 。于是, $(i, 0_\alpha, \lambda) \rho (j + i, b - a, \mu + \lambda)$ 。由于 $(i, 0_\alpha, \lambda) \rho (j + i, 0_{\alpha+\beta}, \mu + \lambda)$, 可得 $(j + i, b - a, \mu + \lambda) \rho (j + i, 0_{\alpha+\beta}, \mu + \lambda)$ 。因此, $-a \varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b \varphi_{\beta, \alpha+\beta} \in N_{\alpha+\beta}(\rho)$ 。

反之, 若 $(i, 0_\alpha, \lambda) \rho (j, 0_\beta, \mu), -a \varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b \varphi_{\beta, \alpha+\beta} \in N_{\alpha+\beta}(\rho)$, 则存在 $i \in L_\alpha, \lambda \in R_\alpha, j \in L_\beta, \mu \in R_\beta$ 使得 $(i + j, -a \varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b \varphi_{\beta, \alpha+\beta}, \lambda + \mu) \rho (i + j, 0_{\alpha+\beta}, \lambda + \mu)$ 。即, $(i, -a, \lambda) + (j, b, \mu) \rho (i + j, 0_{\alpha+\beta}, \lambda + \mu) \rho (i, 0_\alpha, \lambda)$ 。因此, $(j, b, \mu) = (j, 0_\beta, \mu) + (j, b, \mu) \rho (i, 0_\alpha, \lambda) + (j, b, \mu) \rho (i,$

$a, \lambda)$ 。

定理 2 设 ρ, σ 是 S 上的同余。则 $\rho = \sigma$ 当且仅当 $K_\rho = K_\sigma, \text{tr} \rho = \text{tr} \sigma$ 。

证明 事实上, 只需证明 $\rho \subseteq \sigma$ 当且仅当 $K_\rho \subseteq K_\sigma$ 且 $\text{tr} \rho \subseteq \text{tr} \sigma$ 。若 $\rho \subseteq \sigma$, 则显然 $\text{tr} \rho \subseteq \text{tr} \sigma$ 成立且对任意的 $\alpha \in D$, 可得

$$N_\alpha(\rho) = \{a \in T_\alpha \mid (i, a, \lambda) \rho (i, 0_\alpha, \lambda)\} \subseteq \\ \{a \in T_\alpha \mid (i, a, \lambda) \sigma (i, 0_\alpha, \lambda)\} = N_\alpha(\sigma)$$

所以, $K_\rho \subseteq K_\sigma$ 。

反之, 若 $K_\rho \subseteq K_\sigma, \text{tr} \rho \subseteq \text{tr} \sigma$, 则 $N_\alpha(\rho) = K_\rho \cap T_\alpha \subseteq K_\sigma \cap T_\alpha = N_\alpha(\sigma)$ 。同时, 若对 $(i, a, \lambda) \in S_\alpha, (j, b, \mu) \in S_\beta$, 满足 $(i, a, \lambda) \rho (j, b, \mu)$, 则由引理 1 有 $(i, 0_\alpha, \lambda) \rho (j, 0_\beta, \mu), -a \varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b \varphi_{\beta, \alpha+\beta} \in N_{\alpha+\beta}(\rho) \subseteq N_{\alpha+\beta}(\sigma)$ 。因此, $(i, 0_\alpha, \lambda) \sigma (j, 0_\beta, \mu), -a \varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b \varphi_{\beta, \alpha+\beta} \in N_{\alpha+\beta}(\sigma)$ 。即, $(i, a, \lambda) \sigma (j, b, \mu)$ 。这即证明了 $\rho \subseteq \sigma$ 。

下面介绍本文的主要概念, 纯整环并半环上的同余对。

定义 1 设 τ 是 $E^+(S)$ 上的一个同余, K 是 T_S 的一个理想。记 $N_\alpha = K \cap T_\alpha$ 。称 (K, τ) 是 S 的一个同余对, 如果 $(i, 0_\alpha, \lambda) \tau (j, 0_\beta, \mu)$ 可推出 $N_\beta \varphi_{\alpha\beta}^{-1} \subseteq N_\alpha$, 其中 $\alpha, \beta \in D$ 满足 $\alpha \leq \beta$ 。

注 1 若 K 是 T_S 的一个理想, 则 $(K, 1_{E^+(S)})$ 是 S 的一个同余对, 其中 $1_{E^+(S)}$ 是 $E^+(S)$ 上的恒等关系。特别地, $(T_S, 1_{E^+(S)})$ 是 S 的一个同余对。

注 2 若 (K, τ) 是 S 的一个同余对, 则对 D 中任意满足 $\alpha \leq \beta$ 的 α, β , 都有 $N_\alpha \varphi_{\alpha\beta} \subseteq N_\beta$ 。事实上, 设 $a \in N_\alpha$ 。显然, $a \varphi_{\alpha\beta} \in T_\beta$ 。因为 K 是 T_S 的一个子半环, $a \varphi_{\alpha\beta} = 0_\beta + a + 0_\beta \in K$ 。因此, $a \varphi_{\alpha\beta} \in K \cap T_\beta = N_\beta$ 。

定义 2 设 (K, τ) 为定义 1 中的 S 的同余对。在 S 上定义关系 ρ 如下: 设 $(i, a, \lambda) \in S_\alpha, (j, b, \mu) \in S_\beta$, 则 $(i, a, \lambda) \rho (j, b, \mu)$ 当且仅当

- (1) $(i, 0_\alpha, \lambda) \tau (j, 0_\beta, \mu)$,
- (2) $-a \varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b \varphi_{\beta, \alpha+\beta} \in N_{\alpha+\beta}$ 。

我们称如上定义的关系 ρ 为 S 上的迹关系。

引理 2 设 (K, τ) 为 S 的一个同余对。则由 $E^+(S)$ 上的同余 τ 和 T_S 的理想 K 确定的迹关系 ρ 是 S 上的一个同余关系。

证明 首先证明 ρ 是 S 上的一个等价关系。为此只需证明 ρ 具有传递性, 因为 ρ 的自反性及对称性是显然的。假设 $(i, a, \lambda) \rho (j, b, \mu), (j, b, \mu) \rho (k, c, \zeta)$, 其中 $(i, a, \lambda), (j, b, \mu)$ 和 (k, c, ζ) 分别属于 S_α, S_β 和 S_γ 。则 $(i, 0_\alpha, \lambda) \tau (j, 0_\beta, \mu),$

$(j, 0_\beta, \mu) \tau (k, 0_\gamma, \zeta)$ 。于是, $(i, 0_\alpha, \lambda) \tau (k, 0_\gamma, \zeta)$ 。同时可以得到 $(i+k, 0_{\alpha+\gamma}, \lambda+\zeta) \tau (i+j+k, 0_{\alpha+\beta+\gamma}, \lambda+\mu+\zeta)$ 。因为 (K, τ) 是 S 的一个同余对, 我们有 $N_{\alpha+\beta+\gamma} \varphi_{\alpha+\gamma, \alpha+\beta+\gamma}^{-1} \subseteq N_{\alpha+\gamma}$ 。因为 $-a\varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b\varphi_{\beta, \alpha+\beta} \in N_{\alpha+\beta}$, $-b\varphi_{\beta, \beta+\gamma} + c\varphi_{\gamma, \beta+\gamma} \in N_{\beta+\gamma}$, 所以 $-a\varphi_{\alpha, \alpha+\beta+\gamma} + b\varphi_{\beta, \alpha+\beta+\gamma} \in N_{\alpha+\beta+\gamma}$, $-b\varphi_{\beta, \alpha+\beta+\gamma} + c\varphi_{\gamma, \alpha+\beta+\gamma} \in N_{\alpha+\beta+\gamma}$ 。因此, $-a\varphi_{\alpha, \alpha+\gamma} + c\varphi_{\gamma, \alpha+\gamma} \in N_{\alpha+\beta+\gamma} \varphi_{\alpha+\gamma, \alpha+\beta+\gamma}^{-1}$ 。于是, $-a\varphi_{\alpha, \alpha+\gamma} + c\varphi_{\gamma, \alpha+\gamma} \in N_{\alpha+\gamma}$ 。所以 ρ 是传递的。

设 $(i, a, \lambda), (j, b, \mu), (k, c, \zeta)$ 是分别取自 S_α, S_β 和 S_γ 的任意元。如果 $(i, a, \lambda) \rho (j, b, \mu)$, 那么由定义可知 $(i, 0_\alpha, \lambda) \tau (j, 0_\beta, \mu)$, $-a\varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b\varphi_{\beta, \alpha+\beta} \in N_{\alpha+\beta}$ 。于是, $(i, 0_\alpha, \lambda) + (k, 0_\gamma, \zeta) \tau (j, 0_\beta, \mu) + (k, 0_\gamma, \zeta)$ 。因为

$$\begin{aligned} & -(a+c)\varphi_{\alpha+\gamma, \alpha+\beta+\gamma} + (b+c)\varphi_{\beta+\gamma, \alpha+\beta+\gamma} = \\ & -(a\varphi_{\alpha, \alpha+\gamma} + c\varphi_{\gamma, \alpha+\gamma})\varphi_{\alpha+\gamma, \alpha+\beta+\gamma} + \\ & (b\varphi_{\beta, \beta+\gamma} + c\varphi_{\gamma, \beta+\gamma})\varphi_{\beta+\gamma, \alpha+\beta+\gamma} = \\ & -a\varphi_{\alpha, \alpha+\beta+\gamma} + b\varphi_{\beta, \alpha+\beta+\gamma} = \\ & (-a\varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b\varphi_{\beta, \alpha+\beta})\varphi_{\alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma} \in \\ & N_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma} \subseteq N_{\alpha+\beta+\gamma} \end{aligned}$$

我们有 $((i, a, \lambda) + (k, c, \zeta)) \rho ((j, b, \mu) + (k, c, \zeta))$ 。对偶地, 可以证明, $((k, c, \zeta) + (i, a, \lambda)) \rho ((k, c, \zeta) + (j, b, \mu))$ 。同时因为, $(i, 0_\alpha, \lambda)(k, 0_\gamma, \zeta) \tau (j, 0_\beta, \mu)(k, 0_\gamma, \zeta)$, 且 $-(ac)\varphi_{\alpha\gamma, \alpha\gamma+\beta\gamma} + (bc)\varphi_{\beta\gamma, \alpha\gamma+\beta\gamma} = (-a\varphi_{\alpha, \alpha+\beta} + b\varphi_{\beta, \alpha+\beta})c \in N_{\alpha+\beta}c \subseteq N_{\alpha\gamma+\beta\gamma}$, 我们有 $(i, a, \lambda)(k, c, \zeta) \rho (j, b, \mu)(k, c, \zeta)$ 。对偶地, 可以证明 $(k, c, \zeta)(i, a, \lambda) \rho (k, c, \zeta)(j, b, \mu)$ 。因此, ρ 是半环 S 上的一个同余。

现在, 利用上面定义的同余对刻画纯整环并半环 S 上的同余。

定理 3 设 $S = \bigcup_{\alpha \in D} L_\alpha \times T_\alpha \times R_\alpha$ 是一个纯整环并半环。令 K 是 T_S 的一个理想。对任意的 $\alpha \in$

D , 记 $K \cap T_\alpha$ 为 N_α 。则下列结论成立:

(1) 若 ρ 是 S 上的一个同余, 则 $(K_\rho, \text{tr} \rho)$ 是 S 的同余对。

(2) 反之, 若 (K, τ) 是 S 的一个同余对 S , 则 ρ 是 S 上满足 $K = K_\rho$ 和 $\tau = \text{tr} \rho$ 的唯一的同余。

证明 (1) 设 ρ 是 S 上的一个同余。由定理 1 知, K_ρ 是 T_S 的一个理想且当 $\alpha \leq \beta$ 时, 若 $(i, 0_\alpha, \lambda) \rho (j, 0_\beta, \mu)$, 则 $N_\beta \varphi_{\alpha, \beta}^{-1} \subseteq N_\alpha$ 。因此, $(K_\rho, \text{tr} \rho)$ 是 S 的一个同余对。

(2) 由引理 2 知, ρ 是 S 上的一个同余。显然, $\text{tr} \rho = \tau$, 只需证明 $K = K_\rho$ 。设 $a \in T_\alpha$ 。若 $a \in N_\alpha$, 则 $-0_\alpha + a \in N_\alpha$, 也就是 $(i, a, \lambda) \rho (i, 0_\alpha, \lambda)$ 。因此, $a \in N_\alpha(\rho)$ 。另一方面, 若 $a \in N_\alpha(\rho)$ 。则 $(i, a, \lambda) \rho (i, 0_\alpha, \lambda)$ 使得 $a = 0_\alpha + a \in N_\alpha$ 。于是 $N_\alpha = N_\alpha(\rho)$ 。所以, $K = K_\rho$, ρ 的唯一性可由定理 2 直接得到。

参考文献:

- [1] SEN M K, GUO Y Q, SHUM K P. A class of idempotent semirings[J], Semigroup Forum, 2000, 60: 351—367.
- [2] GUO Y Q, SHUM K P, SEN M K. The semigroup structure of left Clifford semirings[J]. Acta Mathematica Sinica: English Series 2003, 19(4): 783—792.
- [3] PASTIJN F, GUO Y Q. Semirings which are unions of rings [J]. Science in China: S series A, 2002, 45(2): 172—195.
- [4] 郭聿琦, 任学明, 岑嘉评. 左 C 半群的另一结构[J]. 数学进展, 1995, 24(1): 39—43.
- [5] ZHU P Y, GUO Y Q, SHUM K P. Congruence pairs on left Clifford semigroups[J]. Semigroups, 1998, 340—351.
- [6] PETRICH M, REILLY N R. Completely Regular Semigroups [M]. New York: Wiley, 1999.
- [7] GOLAN J S. The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science[M]. Exces, England: Longman Scientific & Technical, 1992.
- [8] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory[M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.

Congruence pairs on Orthorings

ZHOU Yuan ¹, GUO Yu ^{qi}², WANG Zheng ^{pan}²

(1. Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Southwest China University, Chongqing 400715, China)

Abstract: To describe the congruences on orthorings, the concept of congruence pair is introduced which is different from the method in regular semigroups. The congruences on orthorings are studied. Results concerning congruences and congruence pairs on orthorings are obtained. The main result is as the following: Every congruence on orthorings is uniquely determined by the congruence pair.

Key words: orthoring; congruence; congruence pair