

幕墙杆索结构有限分析计算方法的研究^{*}

蔡 铭¹, 姜清海², 郭金基³, 毛伙南², 张开成²

(1. 中山大学工学院, 广东 广州 510275;
2. 中山盛兴幕墙有限公司, 广东 中山 528412;
3. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 阐述玻璃幕墙杆索结构的有限分析计算方法。首先将结构简化为受多点荷载作用的变截面梁, 建立其变形后弯曲与轴向位移的耦合微分方程, 接着将变截面梁分成任意小单元, 在小单元段将方程解耦, 利用边界条件和连接条件, 建立传递矩阵将局部解析解化为全局数值解, 并进行稳定性计算, 最后根据工程实例设计实验, 结果表明该方法是精确有效的。

关键词: 杆索结构; 有限分析法; 传递矩阵; 实验

中图分类号: TP391.75 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 06-0032-05

玻璃幕墙支撑结构包括鱼腹式钢索、交叉式钢索和杆索三种类型。文献 [1] 采用有限分析法计算鱼腹式钢索的内力和位移; 文献 [2] 阐述了交叉式钢索结构的计算方法; 文献 [3] 研究两端固定铰支座自平衡体系结构内力和变形的有限分析计算方法。有限分析 (FA) 法的实质是将局部分析解与全局数值解相结合的方法^[4], 其精度相当高, 而且计算过程易于规格化, 具有较强的适用性。对幕墙支撑结构的计算, 也有人用有限单元 (FE) 法通用程序进行数值模拟^[5], 但对杆索这种复杂结构, 通用程序的计算结果并不理想。本文以最贴近实际的一端固定铰支座、一端活动铰支座的边界条件建立杆索结构模型, 然后阐述用有限分析法求解此模型的全过程, 最后通过实验验证其结果。

1 计算模型和位移微分方程

玻璃幕墙承受风荷载和地震荷载的作用, 其组合效应荷载为:

$$q = \beta_z \cdot \mu_s \cdot \mu_z \cdot q_0 + \beta_e \cdot \alpha_{\max} \cdot G/A$$

式中: β_z 为 z 高度处阵风系数; μ_s 为风荷载体形系数; μ_z 为风压高度变化系数; q_0 为基本风压; β_e 为动力放大系数; $\alpha_{\max}$ 为地震影响系数最大值; G/A 为幕墙单位面积重量。以上各项均按 GB50009—2001 取值^[6], q 为垂直作用于幕墙表面的面荷载, 乘以幕墙面积则化为作用于杆索结构的

组合荷载 p_i ^[7]。

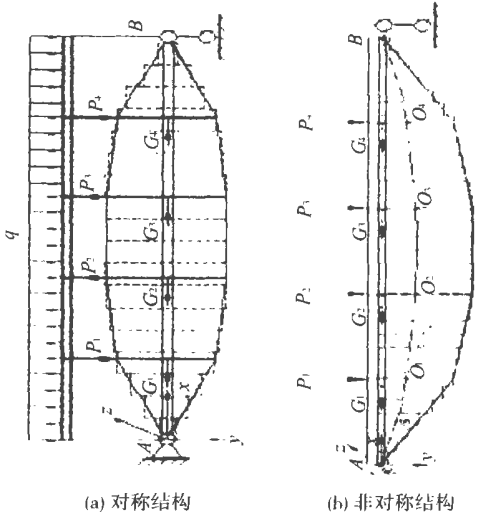


图 1 杆索结构示意图

Fig. 1 The sketch of stay-cable structure

杆索结构由平衡杆 AB、与钢爪联接的支撑杆和钢索组成, 图 1 (a)、(b) 分别是其对称结构和非对称结构的示意图。结构一端为固定铰支座, 另一端为活动铰支座, 支撑杆与平衡杆通过刚结点联接, 再与钢索铰接, 从整体上可以简化为变截面的简支梁。选取 A 点为坐标原 O 点, O_{xyz} 组成右手

^{*} 收稿日期: 2005—03—28

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目 (980343); 中山大学青年教师科研启动基金资助项目 (39000—1131011); 广东省中山市科技资助项目 (2005A138)

作者简介: 蔡铭 (1977 年生), 男, 博士, 讲师; E-mail: caiming@syzu.edu.cn.

坐标系，设 x 向位移为 U ， y 向位移为 W 。可以看出，沿 x 方向的截面积 $A(x)$ 、过 z 轴的主惯性矩 $J_z(x)$ 是随 x 而变化的。结构在组合 P_i 效应荷载和通过支撑杆传递的玻璃自重 G_i 的共同作用下，产生弯曲和轴向拉伸的组合变形，轴向位移对弯曲变形、弯曲位移对轴向变形均产生影响，它们应满足如下微分方程：

$$\frac{d^2[EJ_z W''(x)]}{dx^2} = \frac{d^2[ES_z U'(x)]}{dx^2} + P_i \cdot \delta(x - x_{p_i}) \tag{1}$$

$$\frac{d[EA U'(x)]}{dx} = \frac{d[ES_z W''(x)]}{dx} + G_i \cdot \delta(x - x_{G_i}) \tag{2}$$

式中

$$\delta(x - x_{p_i}) = \begin{cases} 1 & x = x_{p_i} \\ 0 & x \neq x_{p_i} \end{cases}$$
$$\delta(x - x_{G_i}) = \begin{cases} 1 & x = x_{G_i} \\ 0 & x \neq x_{G_i} \end{cases}$$

E 为杨氏模量， S_z 为过 z 轴的静矩， x_{p_i} 和 x_{G_i} 分别为荷载 P_i 和 G_i 作用点的坐标。

结构一端为固定铰支座，另一端为活动铰支座，上述方程还应满足其边界条件：

当 $x=0$ 时， $W(x)=U(x)=0, \frac{d^2 W(x)}{dx^2}=0$;

当 $x=l$ 时， $W(x)=0, \frac{d^2 W(x)}{dx^2}=0, T_B=0$ 。

式中 T_B 为杆端约束反力。

2 有限分析法

方程 (1)、(2) 是变截面、变弯曲刚度的非线性耦合微分方程，求解的困难在于 $A(x)$ ， $J_z(x)$ 无法用精确的数学表达式表示。本文采用有限分析法求解，沿 x 向把结构分成 n 段小单元体，每个小单元局部坐标选取过形心的主坐标（这里为书写方便仍以 xyz 表示），每段用阶梯形折线代替原来的曲线（如图 1 虚线所示）。当 n 足够大时，每个单元体都可以看作等截面体，也就是说，同一单元体内的 $A(x)$ 、 $J_z(x)$ 是常量。由于过形心主坐标，截面静矩 $S_z=0$ ，于是对任一个单元体（不妨设为 k 单元），变系数微分方程 (1)、(2) 可以化为常系数微分方程：

$$EJ_k \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = P_k \cdot \delta(x - x_{p_k}) \tag{4}$$

$$EA_k \frac{d^2 U(x)}{dx^2} = G_k \cdot \delta(x - x_{G_k}) \tag{5}$$

式中 x_{p_k} ， x_{G_k} 为 k 单元体内荷载 P_k ， G_k 的作用点。为了减少篇幅，以下仅讨论弯曲变形的计算问题。

对方程 (4)，用初始参数法可求得解析解：

$$W = W_k^0 + W_k^0 - M_k^0(x - x_k)^2/2EJ_k - Q_k^0(x - x_k)^3/6EJ_k + \parallel_{x_{p_k}} P_k(x - x_{p_k})^3/6EJ_k$$
$$k = 1, 2, \cdots, n, x_k \leq x \leq x_{k+1} \tag{6}$$

式中 W_k^0 ， W_k^0 ， M_k^0 ， Q_k^0 是 k 单元体左端位移、转角、弯矩和剪力，记 $I_k^0 = [W_k^0, W_k^0, M_k^0, Q_k^0]^T$ ，称为单元体弯曲变形的左端初参数状态向量。

依据图 1 所选取的坐标，将该图顺时针旋转 $\pi/2$ ，AB 平衡杆处于水平位置，位移 W 朝下为正，弯矩 M 选取向上凹为正，剪力 Q 选取以小单元体截面外法线方向顺时针转动 $\pi/2$ 与它重合为正，反之为负，故得

$$M = -EJ(x) \cdot W''(x), dM(x)/dx = Q(x) \tag{7}$$

按上述符号规定，代入 (6) 式可求得 W' ， M ， Q 的表达式。在 k 单元的右端，它们的位移、转角、剪力、弯矩记为 W_k^L ， W_k^L ， M_k^L ， Q_k^L ，记 $I_k^L = [W_k^L, W_k^L, M_k^L, Q_k^L]^T$ ，称为 k 单元体弯曲变形右端面参数的状态向量。

令 $x=x_{k+1}$ ，代入 (6)、(7) 两式及 W' 表达式，可求得 W_k^L ， W_k^L ， M_k^L ， Q_k^L 诸值。用矩阵的形式表示为

$$I_k^L = B_k I_k^0 + P_k J_k \tag{8}$$

其中

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & x_{k+1} - x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2EJ_k} - \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6EJ_k} \\ 0 & 1 & -\frac{(x_{k+1} - x_k)}{EJ_k} - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2EJ_k} \\ 0 & 0 & 1 & (x_{k+1} - x_k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

称为 k 单元体的传递矩阵；

$$J_k = \left[\frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6EJ_k}, \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2EJ_k}, -(x_{k+1} - x_k), -1 \right]^T \tag{10}$$

称为集中荷载 P_k 的影响列阵。

在 $k+1$ 结点应满足位移、转角、弯矩、剪力的连接条件，即：

$$I_k^L = I_{k+1}^0 \tag{11}$$

式中 $I_{k+1}^0 = [W_{k+1}^0, W_{k+1}^0, M_{k+1}^0, Q_{k+1}^0]^T$ ，称为 $k+1$ 单元弯曲变形左端初参数状态向量。

由 (8)、(11) 式可得

$$\boldsymbol{I}_{k+1}^0 = \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{I}_0^k + \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{J}_k \tag{12}$$

再利用 $k+1$ 结点的连续条件仿前推导，依此递推传递矩阵可得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_n^L &= \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{B}_{n-1} \cdots \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{I}_1^0 + \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{B}_{n-1} \cdots \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{J}_1 + \\ &\boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{B}_{n-1} \cdots \boldsymbol{B}_3 \boldsymbol{J}_2 + \cdots + \boldsymbol{P}_{n-1} \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{J}_{n-1} + \boldsymbol{P}_n \boldsymbol{J}_n \end{aligned} \tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{B}_n, \boldsymbol{B}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{J}_n, \boldsymbol{J}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{J}_1$ 分别为 (9)、(10) 两式在 $k=1, 2, \cdots, n$ 时所表示的矩阵。

当 $k=1$ 及 $k=n$ 时，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1^0 &= [W_1^0, W_1^0, M_1^0, Q_1^0]^T \\ \boldsymbol{I}_n^L &= [W_n^L, W_n^L, M_n^L, Q_n^L]^T \end{aligned} \tag{14}$$

$\boldsymbol{I}_1^0, \boldsymbol{I}_n^L$ 分别称为 1 单元起始参数状态向量及 n 单元右端面的状态向量，它们必须分别满足边界条件 (3)。由于两端为固定或活动铰支座，因而有

$$W_1^0 = M_1^0 = 0, W_n^L = M_n^L = 0 \tag{15}$$

在 (13) 式传递矩阵中，起始参数仅有 W_1^0, Q_1^0 是未知量，换句话说， W_n^L, M_n^L 仅包含 2 个未知量 W_1^0, Q_1^0 ，它们可由 (15) 第二式求出，进一步不难得到 $\boldsymbol{I}_n^L$ 中 W_n^L, Q_n^L 的值。再由递推公式的传递矩阵，解出各单元列状态向量的值，至此可以把局部解析解化为全局数值解。

3 稳定性计算

一端固定铰支座，另一端活动铰支座的杆索结构在玻璃自重载荷 G_i 和钢索预张力作用下，会产生载荷作用平面内 xOy 失稳及平面外 yOz 失稳问题，其丧失稳定的屈曲微分方程式十分复杂。幕墙工程的稳定性计算，通常只作平衡杆或支撑杆的主应力校核，而不作屈曲刚度计算，因此本文不再写出屈曲微分方程，只写出平衡杆稳定性计算公式。

将平衡杆应力记为 σ ，所受轴压力记为 N ，在钢索杆端预张力 T_1 和玻璃自重荷载 G_i 作用下，对称结构平衡杆 $N=2T_1(1+\eta)\cos\theta+G_i$ ，非对称结构平衡杆 $N=T_1(1+\eta)\cos\theta+G_i$ ，其中 θ 为杆端钢索与平衡杆的夹角， η 为预张力系数。设 A 为平衡杆的截面积，则 $\sigma=N/A$ 。

平面内 xOy 稳定性验算公式：

$$\sigma_z = \sigma / \varphi_z \leq [\sigma]$$

式中： $[\sigma]$ 为材料失稳许用应力； φ_z 为截面绕 z 轴的稳定系数，由 λ_z 查表求得^[8]。而 λ_z 由下列公

式求得： $\lambda_z = l_z / i_z, i_z = \sqrt{J_z / A}$ ， l_z 为支撑杆间最大间距。

平面外 yOz 稳定性验算公式：

$$\sigma_z = \sigma / \varphi_y \leq [\sigma]$$

式中： φ_y 为截面绕 y 轴的稳定系数， λ_y 由查表^[8]求得。而 λ_y 由下列公式求得： $\lambda_y = l_{AB} / i_y, i_y = \sqrt{J_y / A}$ ， l_{AB} 为平衡杆总长度， J_y 为截面绕 y 轴的惯性矩。

4 实验测试

为了检验杆索结构有限分析法的正确性，本文对如图 2 所示非对称结构分五级载荷 $P_i=98、196、294、392、490\text{ N}$ 作用进行实验测试，用 BLR-1 拉力传感器测量钢索两边的张力，用 YJ-25 应变仪测量平衡钢管应变，用大量程百分表测量位移。

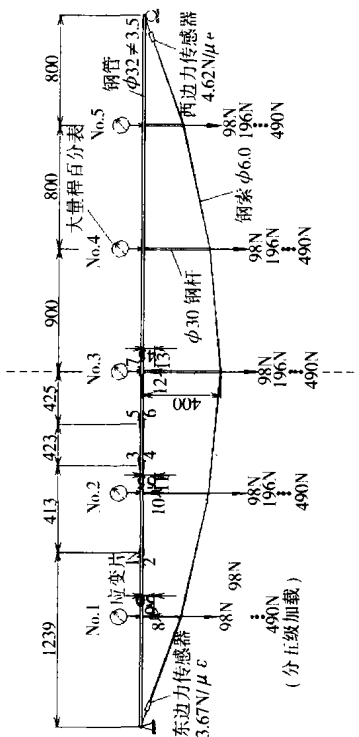


图 2 杆索结构实验示意图

Fig 2 The experimental sketch of strut-cable structure

对上述实验结构，在荷载 $P=490\text{ N}$ 的作用下，分别采用有限分析法、有限单元法通用软件 3D3S、ANSYS 和“代梁法”^[9] 进行钢索张力和位移的计算，其结果和实验测量结果如表 1、表 2 所示。

表 1 $P=0.5\text{ kN}$ 时钢索各段的张力

Tah 1	The tensions of cable unit on $P=0.49\text{ kN}$						/kN
T	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	
3D3S	4.7	4.8	4.8	4.8	4.8	4.7	
ANSYS	4.16	4.50	4.6	4.6	4.50	4.16	
代梁法	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	
FA 法	3.07	3.25	3.72	3.72	3.25	3.07	
实验	3.1	3.24	3.33	3.33	3.25	3.1	

表 2 $P=0.5\text{ kN}$ 非对称结构的位移

Tah 2	The displacements of unsymmetrical structure on $P=0.49\text{ kN}$					/mm
X/m	800	1600	2500	3400	4200	
3D3S	5.8	8.7	9.7	8.7	5.8	
ANSYS	4.76	9.18	9.78	9.18	4.76	
FA 法	8.36	14.53	17.13	14.53	8.36	
实验	6.69	14.99	17.04	14.54	7.42	

从表中可以得出，采用有限单元软件 3D3S、ANSYS 及“代梁法”计算钢索两边的张力与实验对比误差分别为 34%、25.39%及 24.4%；采用 FA 法计算钢索两边张力与实验对比误差仅为 0.8%；采用有限单元软件 3D3S 及 ANSYS 计算结构中心点最大位移与实验对比误差分别为 43%、42.9%；而用 FA 法计算结构中心点最大位移与实验对比误差仅为 0.5%。本文 FA 法的计算结果与实验基本一致，数据可靠。分析其原因，有限单元法是按杆索划分单元，以刚铰结点为单元结点，未根据精度要求再细分，计算简化模型与本文不同，本文将杆索结构看作变截面梁更接近于实际。

5 讨 论

以上是杆索结构有限分析法的计算过程，下面就如何提高计算功能和影响计算精度的有关问题进行讨论。

(1) 本文将杆索结构简化为多点荷载作用下的变截面梁，过 Z 轴的主惯性矩 $J_z(x)$ 是随 x 而变化的，计算其值是提高精度的关键。实际结构的 $J_z(x)$ 由 AB 平衡杆、上下钢索截面积和支撑钢杆这三部分对 z 轴的惯性矩组成，而钢索的曲线形状、支撑钢杆的间断式分布，给求 $J_z(x)$ 带来一定的难度。本文采用分单元段求出表达式，并引入实验加以修正来解决这个问题。

(2) 分析有限分析法的连续条件，可以看出相邻两单元的弯矩和轴向力并不在同一直线，因此会产生力偶矩和双力矩，造成一定误差。这种用阶梯折线代替上下钢索的连续曲线的做法，其计算精度

与分成小单元体数目 n 有关，误差的具体大小可用下式表示^[4]：

$$|y_k^* - \bar{y}_k| = h_k/3n^2, \quad x \in (x_k, x_{k+1})$$

式中 y_k^* 为原钢索曲线坐标， $\bar{y}_k$ 为阶梯折线的坐标， h_k 为 k 单元的标高。可见，只要 n 充分大，其误差可以满足计算精度的要求。

(3) 本文将杆索非对称结构简化为变截面的薄壁梁，每个截面的形心不在 AB 轴线，而是下移连成一条曲线，两者过形心的惯性矩不同。用有限分析法分成小单元段后，过形心选取局部坐标使静矩为 0，能恰到好处地将微分方程组解耦。为了进一步简化计算，方便使用，作者还研发出专门应用于幕墙支撑结构的有限分析计算软件^[10]。

6 结 论

有限分析法能精确有效地计算杆索结构的变形和内力，它与有限单元法不同，其实质是将局部解析解与全局数值解相结合的计算方法，本文将其成功推广到幕墙杆索结构的四阶微分耦合方程组，从实验结果可以看出，其高精度是其它方法不能比拟的，对于已广泛应用于幕墙工程的杆索结构，这不仅有较强的理论意义，更有重要的实际价值。

参考文献:

[1] 姜清海, 郭金基, 宁松凯, 等. 钢索结构计算的有限分析法[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2002, 41(5): 15—18.

[2] 姜清海, 宁松凯, 张开成, 等. 交叉式钢索结构的有限分析计算方法[J]. 机电工程技术, 2002, 31(6): 31—33.

[3] 蔡铭, 姜清海, 郭金基, 等. 自平衡体系结构有限分析计算方法研究[J]. 广东土木与建筑, 2004, 7: 1—4.

[4] 郭金基. 变截面开口薄壁杆件的有限分析法[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 1985, 24(4): 39—50.

[5] 叶康生, 袁驷. 空间几何构造分析的有限单元法[J]. 力学与实践, 2003, 25(1): 23—25.

[6] 中国建筑科学院. 玻璃幕墙工程技术规范(JGJ102—96)[S]. 北京: 中国建筑工程出版社, 1996.

[7] 姜清海, 张开成, 刘斌, 等. 玻璃幕墙承受空气动力荷载作用的计算软件[J]. 机床与液压, 2003(增刊): 52—54.

[8] 建筑工程常用数据系列手册编写组. 建筑结构常用数据手册, 下册[M]. 北京: 中国建筑工程出版社, 1997: 1009—1010.

[9] 张芹. 玻璃金属板、石材、点式幕墙手册[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 2001: 274—277.

[10] 蔡铭, 姜清海, 郭金基, 等. 幕墙自平衡体系结构有限分析计算软件的研究[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2004, 43(5): 24—27. (下转第 40 页)

[10] FOROUHI A R, BLOOMER I. Optical properties of crystal-line semiconductors and dielectrics [J] . Phys Rev B, 1988 38: 1865— 1874.

[11] FOROUHI A R, BLOOMER I [P] . U. S. Patent No. 4, 905, 170.

[12] 杨文华, 李红波, 吴鼎祥. 太阳能电池减反射膜设计与分析[J] . 上海大学学报, 2004, 10(1): 39— 42.

[13] 杨宏, 王鹤, 于化丛, 等. 常压化学汽相沉积 TiO_x 纳米光学薄膜及其用于太阳能电池减反射膜的研究[J] . 太阳能学报, 2002, 23(4): 437— 440.

[14] TOMASZEWSKI H. TiO₂ films prepared by DC magne-tron sputtering from ceramic targets[J] . Vacuum, 2003 68: 31— 38.

**Influence of Oxygen Flow on Optical Property of TiO₂ Thin Film
Prepared by DC Reactive Magnetron Sputtering**

WANG He quan^{1, 2, 3}, SHEN Hui², BA De chun³, WANG Bao wei⁴, WEN Li shi²

(1. School of Mechanism and Automobile, Shenyang Institute of Aeronautical Engineering 110034, China;
2. School of Physics and Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;
3. School of Mechanical Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China;
4. Guangzhou Institute of Energy Conversion, Guangzhou 510070, China)

Abstract: Titanium dioxide films were grown on silicon substrates by DC reactive magne-tron sputtering under total gas pressure of 2.0×10^{-1} Pa with Argon flow of 42. 6 sccm for 30 minutes, and the optical property of TiO₂ thin films were changed by controlling the oxygen flow. It is shown, by n&k analyzer 1 200 measurements, that the average reflectance of the films decrease and that the low reflectance vale move towards the center wavelengthh (550 nm), when the oxygen flow is increased. The refractive index of the films, however, is not affected and the extinction coefficient (*k*) appears to increase. The characterization of the films were carried out using XRD and SEM, it is found that the rutile phase increased and the surface morphology was dense and smoothness with increasing the oxygen flow.

Key words: TiO₂ thin film; DC reactive magnetron sputtering; oxygen flow; reflectance

(上接第 35 页)

**A Study on Finite Analysis Calculation Method of
the Curtain Wall Strut cable Structure**

CAI Ming¹, JIANG Qing hai², GUO Jin ji³, MAO Huo nan², ZHANG Kai cheng²

(1. School of Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Zhongshan Shengxing Curtain Wall Co. Ltd, Zhongshan 528412, China;
3. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A finite analysis calculation method of the glass curtain wall strut cable structure is presented. The structure is simplified to a beam with variable thickness under the concentrated loads. Then the coupling differential equations of bend and axial displacement are established. The beam is divided into a series of discretional units on which the coupling in equations can be separated. With the confined conditions and the connected conditions, the transfer matrix is formed to transfer the local analytical solution to the whole numerical solution. The stability calculations are carried out. Finally, a experiment is designed based on an engineering example, its results show that the finite analysis method is precise and valid for strut cable structure.

Key words: strut cable structure; finite analysis method; transfer matrix; experiment