

用二次分形插值构造一类正交多尺度分析^{*}

邓小炎, 隆广庆

(中山大学 科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘要: 给出了利用二次分形插值函数构造一类连续、紧支撑和正交的多小波尺度函数的方法。不同于用仿射分形插值函数建立的正交小波, 尺度函数具有可微性, 可用来建立微分方程的数值方案。

关键词: 多小波; 分形插值函数; 正交多尺度分析

中图分类号: O174.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 06-0011-05

由 Mallat 和 Meyer 提出的多尺度分析 (MRA)^[1,2] 已经成为构造小波的重要方法。传统的单尺度函数构成的多尺度分析具有一定的局限性, 如它不能构造出同时具有连续性、紧支撑、正交性和对称性的小波, 而这些性质在小波的应用中是极其重要的。多重小波^[3] 的产生, 使得人们能容易地构造出同时具有上述性质的小波。文[4-6] 研究了用分形插值函数 (FIFs) 来生成平移和伸缩不变的函数空间, 获得的多小波尺度函数完全由对应的插值条件和压缩因子决定, 与样条小波具有类似的特点。文[7] 考虑了用仿射分形插值函数 (AFIFs) 来构造正交小波分析, 尺度函数具有诸如连续性、正交性、紧支撑和对称性等性质, 但处处不可微。为改进尺度函数的光滑性, 文[8] 讨论了用一类特殊的二次分形插值构造多小波尺度函数的具体方法, 得到的尺度函数一阶光滑, 但未考虑尺度函数的正交性。本文继续这方面的研究, 将文[8] 的方法一般化, 我们获得的尺度函数同时具有正交性和可微性, 可用来建立微分方程的数值方案。

1 分形插值函数

设 $I=[0, 1]$, $B(I)$ 表示 I 上的有界实函数所构成的 Banach 空间, $\beta = \bigotimes_{j=0}^{N-1} B(I)$ 是 $B(I)$ 的 N 重直积, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) \in \beta$ 。对 $i=0, 1, 2, \dots, N-1$, 定义映射 $\phi_i: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ 和 $V_i: [0, 1) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 如下

$$\phi_i(x) = \frac{1}{N}(x+i) \quad (1)$$

$$V_i(x, y) = \lambda_i(x) + s_i f(x) \quad (2)$$

假定 $s = \max |s_i| < 1$, 定义映射 $\Phi_\lambda: B(I) \rightarrow$

$B(I)$ 为

$$(\Phi_\lambda f)(x) = V_i(\phi_i^{-1}(x), f(\phi_i^{-1}(x))) \quad (3)$$

则 Φ_λ 是 $B(I)$ 上的压缩映射, 存在唯一一个不动点 $f_\lambda(x)$, 称之为分形插值函数。为使 $f_\lambda(x) \in C^1(I)$, 对 $i=0, 1, \dots, N-2$, 假设

$$V_{i+1}(0, f_\lambda(0)) = V_i(1^-, f_\lambda(1^-)) \quad (4)$$

$$V'_{i+1}(0, f_\lambda(0)) = V'_i(1^-, f_\lambda(1^-)) \quad (5)$$

另外, 为保证导数插值条件的独立性, 本文规定 $s_0, s_{N-1} \neq 1/2$ 。若用 Π_m 表示 I 上次数不超过 m 的多项式函数集, 则有如下引理。

引理 1^[5] 映射 $\lambda \xrightarrow{\theta} f_\lambda$ 是从 $\bigotimes_{j=0}^{N-1} \Pi_m$ 到 $\theta(\bigotimes_{j=0}^{N-1} \Pi_m)$ 的线性同构。

考虑 $m=2$ 的情形。若 f_λ 满足(4)和(5)式, 由引理 1 可知 $S_0 = \theta(\bigotimes_{j=0}^{N-1} \Pi_2) \cap C^1(I)$ 是 $N+2$ 维的, 任意的 $g \in S_0$ 可由给定的 $N+2$ 个插值条件来确定, 通常考虑节点函数值 $g(i/N)$ ($i=0, 1, \dots, N$) 和边界点的导数值。映射 θ 也可以看成是 $\mathbf{R}^{N+2} \rightarrow S_0$ 的线性同构, 因而给定 $\bar{y} \in \mathbf{R}^{N+2}$, 可以确定满足条件(4)和(5)的 S_0 中的唯一元 $f_{\bar{y}}$, 为方便起见本文称之为二次分形插值函数。若给定 $s_0, s_1, \dots, s_{N-1}$, 记 V_0 表示在区间 $[i, i+1)$ ($i \in \mathbf{Z}$) 均为分形插值的函数集, $C_b(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 上的有界连续函数空间, 由文[4] 有

引理 2 令 $V_0 = V_0 \cap C_b(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, 规定 $f \in V_k \Leftrightarrow f(N^{-k} \circ) \in V_0$, 则 ① $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$; ② $\bigcap_k V_k = \{0\}$ 。

为获得正交尺度函数, 首先就一般情形建立有关的积分公式。记 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$, 设 λ_i

* 收稿日期: 2004-12-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10101031); 广东省自然科学基金资助项目 (04009794)

作者简介: 邓小炎 (1964年生), 男, 副教授, 博士, E-mail: dxysgh@mail.hzau.edu.cn

$= a_i + b_i x + c_i x^2$, 对 $i = 0, 1, \dots, N-1$, λ 对应的分形插值函数满足

$$f_\lambda(x) = \lambda_i(Nx - i) + s_i f_\lambda(Nx - i), \\ x \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}) \tag{6}$$

设 $f_\lambda(x)$ 为分形插值函数, 则

$$m_0 = \int_0^1 f_\lambda(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{i/N}^{(i+1)/N} [\lambda_i(Nx - i) + s_i f_\lambda(Nx - i)] dx \\ \text{作积分变量代换 } Nx - i \rightarrow x, \text{ 容易推得} \\ m_0 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (a_i + \frac{1}{2} b_i + \frac{1}{3} c_i)}{N - \sum_{i=0}^{N-1} s_i} \tag{7}$$

用类似的方法, 有

$$m_1 = \int_0^1 x f_\lambda(x) dx = \\ \frac{1}{N^2 - \sum_{i=0}^{N-1} s_i} \sum_{i=0}^{N-1} [(\frac{1}{2} + i) a_i + (\frac{1}{3} + \frac{i}{2}) b_i + \\ (\frac{1}{4} + \frac{i}{3}) c_i + i s_i m_0] \tag{8}$$

和

$$m_2 = \int_0^1 x^2 f_\lambda(x) dx = \\ \frac{1}{N^3 - \sum_{i=0}^{N-1} s_i} [(\frac{1}{3} + i + i^2) a_i + (\frac{1}{4} + \frac{2i}{3} + \frac{i^2}{2}) b_i + \\ (\frac{1}{5} + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{3}) c_i + i^2 s_i m_0 + 2 i s_i m_1] \tag{9}$$

这里称 m_0, m_1, m_2 为 $f_\lambda(x)$ 的第 1 阶、2 阶和 3 阶矩。由此可以计算 2 个分形插值函数乘积的积分。设另一个分形插值函数为 $f_{\hat{\lambda}}$, 可以推得

$$\langle f_\lambda, f_{\hat{\lambda}} \rangle = \int_0^1 f_\lambda(x) f_{\hat{\lambda}}(x) dx = \\ \frac{1}{N - \sum_{i=0}^{N-1} s_i \hat{s}_i} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \hat{a}_i + \frac{1}{2} b_i \hat{a}_i + \frac{1}{3} c_i \hat{a}_i + \\ \frac{1}{2} a_i \hat{b}_i + \frac{1}{3} b_i \hat{b}_i + \frac{1}{4} c_i \hat{b}_i + \frac{1}{3} a_i \hat{c}_i + \\ \frac{1}{4} b_i \hat{c}_i + \frac{1}{5} c_i \hat{c}_i + s_i (\hat{a}_i m_0 + \hat{b}_i m_1 + \hat{c}_i m_2) + \\ \hat{s}_i (a_i \hat{m}_0 + b_i \hat{m}_1 + c_i \hat{m}_2) \tag{10}$$

其中, $\hat{m}_i (i = 0, 1, 2)$ 分别为 $f_{\hat{\lambda}}$ 对应的矩值。

2 多尺度分析的建立

这里我们考虑 $N=2$ 的情形。注意到

$$f'_\lambda(x) = N \lambda'_i(Nx - i) + \\ N s_i f'_\lambda(Nx - i), x \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}) \tag{11}$$

由光滑性条件 (4) 和 (5) 可以获得

$$\begin{cases} (1-s_0)(1-s_1)(a_0+b_0+c_0-a_1)+ \\ s_0(1-s_0)(a_1+b_1+c_1)-s_1(1-s_1)a_0=0, \\ (1-2s_0)(1-2s_1)(b_0+2c_0-b_1)+ \\ 2s_0(1-2s_0)(b_1+2c_1)-2s_1(1-2s_1)b_0=0 \end{cases}$$

此时 S_0 是 4 维的, 为获得 S_0 的基底, 对 $g \in S_0$, 考虑如下的插值条件

$$g(0)=y_0, g'(0)=y'_0, g'(1)=y'_1, g(1)=y_1 \tag{12}$$

利用 (6) 式可以获得压缩映射中多项式 λ_0, λ_1 的系数表达式

$$\begin{aligned} a_0 &= (1-s_0)y_0, b_0 = \frac{1-2s_0}{2}y'_0, \\ c_0 &= \frac{s_0+s_1-1}{2}y_0 + \frac{1-s_0-s_1}{2}y_1 + \\ &\quad \frac{6s_0+2s_1-3}{8}y'_0 + \frac{2s_1-2s_0-1}{8}y'_1, \\ a_1 &= \frac{1-s_0-s_1}{2}y_0 + \frac{s_0-s_1+1}{2}y_1 + \\ &\quad \frac{2s_1-2s_0+1}{8}y'_0 + \frac{2s_1-2s_0-1}{8}y'_1, \\ b_1 &= (s_0+s_1-1)y_0 + (1-s_0-s_1)y_1 + \\ &\quad \frac{2s_0-2s_1-1}{4}y'_0 + \frac{2s_1+2s_0-1}{4}y'_1, \\ c_1 &= \frac{1-s_0-s_1}{2}y_0 + \frac{s_0+s_1-1}{2}y_1 + \\ &\quad \frac{2s_1-2s_0+1}{8}y'_0 + \frac{3-2s_0-6s_1}{8}y'_1 \end{aligned}$$

现在让 (y_0, y'_0, y'_1, y_1) 分别取 $\mathbf{R}^4$ 中的线性无关的向量 $(1, p_1, p_2, 0)$ 、 $(0, 1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 1, 0)$ 和 $(0, q_1, q_2, 1)$, 由引理 1 可以获得 S_0 的一组基 $\{f_{y_i}; i = 0, 1, 2, 3\}$ 。为构造多小波的尺度函数, 选取参数 p_1, p_2, q_1, q_2 使得 $\langle f_{y_0}, f_{y_i} \rangle = 0 = \langle f_{y_3}, f_{y_i} \rangle$, $i = 1, 2$ 。对 f_{y_1}, f_{y_2} 利用 Gram Schmit 过程进行正交化处理后记为 $\phi^{(0)}, \phi^{(1)}$, 令

$$\phi^{(2)}(x) = \begin{cases} f_{y_3}(x), & x \in [0, 1), \\ f_{y_0}(x-1), & x \in [1, 2), \\ 0, & x \notin [0, 2) \end{cases} \tag{13}$$

则 $\phi^{(i)}(x) \in V_0 (V_0$ 的意义见引理 2)。注意到 $\forall f \in V_0$ 由相应的插值条件唯一确定, 由线性代数理论容易推得 f 可由 $\{\phi^{(i)}(x); i = 0, 1, 2\}$ 及它们的整平移函数唯一线性表示, 从而 $V_0 = \text{span}\{\phi^{(i)}(2x - k); i = 0, 1, 2, k \in \mathbf{Z}\}$ 。

引理 3 令

$$\begin{aligned} G(x) &= -(p_1 + q_1)f_{y_1}(x) - \\ &\quad (p_2 + q_2)f_{y_2}(x) + f_{y_0}(x) + f_{y_3}(x) \end{aligned} \tag{14}$$

则当 $x \in [0, 1]$ 有 $G(x) = 1$ 。

证明 事实上, $G(x)$ 是支撑域为 $[0, 1]$ 的分形插值函数, 满足条件 $G(0) = 1, G'(0) = 0$ 和 $G'(1) = 0, G(1) = 1$, 由此可以获得 $G(x)$ 的表达式

$$G(x) = \begin{cases} 1 - s_0 + s_0 G(2x), & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 - s_1 + s_1 G(2x - 1), & x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases} \quad (15)$$

当 $x \in [0, \frac{1}{2})$ 时, 由(15)式可推得

$$G(x) = \frac{G(x \frac{1}{2^n}) - 1}{\frac{1}{2^n}} + 1, n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 并注意到 $G(0) = 1$ 和 $G(x)$ 的有界性, 得到 $G(x) = 1$ 。用类似的方法可以证明 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时 $G(x) = 1$, 证毕。

引理 4 记 $\{\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}\}$ 形成的伸缩平移空间为 V_k , 则 $\bigcup_k V_k$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上稠密。

证明 利用引理 3 有:

$$\begin{aligned} &-(p_1 + q_1)\phi^{(0)}(x - l) - \\ &(p_2 + q_2)\phi^{(1)}(x - l) + \phi^{(2)}(x - l) = \\ &-(p_1 + q_2)f_{y_i}(x - l)\chi_{[l, l+1]} - \\ &(p_2 + q_2)f_{y_2}(x - l)\chi_{[l, l+1]} + \\ &f_{y_3}(x - l)\chi_{[l, l+1]} + f_{y_0}(x - l - 1)\chi_{[l+1, l+2]} = \\ &\sum_l G(x - l)\chi_{[l, l+1]} = 1 \end{aligned}$$

由文[4]命题 3.1 获得 $\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的稠密性, 证毕。

由引理 4 和文[4]中的定理 3.2 获得

定理 1 $\{\phi^{(i)}(x); i = 0, 1, 2\}$ 生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的连续的、紧支撑的多尺度分析。

3 正交尺度函数的构造方法

为使 $\{\phi^{(i)}(x); i = 0, 1, 2\}$ 及其整平移函数相互正交, 需要确定参数使 $f_{y_0}, f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y_3}$ 相互正交。

首先定义几个基本函数如下

$$\begin{aligned} P_1(s_0, s_1) = &8s_0^5 + 8s_1^5 - 216s_0^4 - 6s_1^4 + 524s_0^2 + \\ &274s_0^3 - 146s_1^3 + 104s_1^2 - 624s_0 + 216s_1 - \\ &20s_0s_1(23s_0 - 10s_1) + 214s_0s_1(s_0^2 + s_1^2) - \\ &4s_0^2s_1^2(19s_0 - 11s_1) + 4s_0s_1(17s_0^3 - 13s_1^3) - \\ &190s_0^2s_1^2 - 264s_0s_1 + 160 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} P_2(s_0, s_1) = &\sum_{i=0}^1 [6s_i^5 - 83s_i^4 - 44s_i^3 + 386s_i^2 + \\ &20s_i - 230s_0s_1s_i + 270s_0s_1s_i^2 - 24s_0^2s_1^2s_i + \\ &2s_0s_1s_i^3] + 134s_0^2s_1^2 - 376s_0s_1 - 96 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C_1(s_0, s_1) = &-24s_0^5 + 6s_1^5 + 484s_0^4 - 86s_1^4 - \\ &1100s_0^3 + 220s_1^3 - 880s_0^2 + 260s_1^2 + 2384s_0 - \\ &376s_1 + 60s_0^2s_1^2(s_0 - s_1) + 80s_0s_1(11s_0 - 10s_1) + \\ &6s_0s_1(s_0^2 + s_1^2) - 10s_0s_1(13s_0^3 + 2s_1^3) + \\ &334s_0^2s_1^2 - 340s_0s_1 - 864 \end{aligned} \quad (19)$$

和

$$\begin{aligned} C_2(s_0, s_1) = &-14s_0^5 + 16s_1^5 + 134s_0^4 - 16s_1^4 - \\ &140s_0^3 + 340s_1^3 - 820s_0^2 - 520s_1^2 + 424s_0 - \\ &656s_1 - 274s_0s_1(s_0^2 + s_1^2) + 360s_0s_1(2s_0 + s_1) + \\ &20s_0^2s_1^2(5s_1 - s_0) + 10s_0s_1(2s_0^3 - 7s_1^3) + \\ &54s_0^2s_1^2 + 220s_0s_1 + 416 \end{aligned} \quad (20)$$

约定二元函数 $f(s_1, s_0)$ 是将 $f(s_0, s_1)$ 中的变量 s_1, s_0 互换后所得的函数, 利用(7)–(10)式, 由 $\langle f_{y_0}, f_{y_i} \rangle = 0 = \langle f_{y_3}, f_{y_i} \rangle, (i = 1, 2)$ 可以得到关于参数

$$\begin{aligned} &p_1, p_2, q_1, q_2 \text{ 的线性系统} \\ &\begin{cases} P_1(s_0, s_1) \circ p_1 + P_2(s_0, s_1) \circ p_2 = C_1(s_0, s_1), \\ P_2(s_0, s_1) \circ p_1 + P_1(s_1, s_0) \circ p_2 = C_2(s_0, s_1) \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

和

$$\begin{cases} P_1(s_0, s_1) \circ q_1 + P_2(s_0, s_1) \circ q_2 = -C_2(s_1, s_0), \\ P_2(s_0, s_1) \circ q_1 + P_1(s_1, s_0) \circ q_2 = -C_1(s_1, s_0) \end{cases} \quad (22)$$

注意到 $P_2(s_0, s_1) = P_2(s_1, s_0)$, 容易推得

$$q_1 = -p_2(s_1, s_0), q_2 = -p_1(s_1, s_0) \quad (23)$$

若记

$$\begin{aligned} P(s_0, s_1) = &\sum_{i=0}^1 [28s_i^8 - 780s_i^7 + (104s_0s_1 - 3985)s_i^6 + \\ &1260(9s_0s_1 + 17)s_i^5 - 2(1768s_0^2s_1^2 + 12900s_0s_1 + \\ &7473)s_i^4 - 60(189s_0^2s_1^2 + 437s_0s_1 + 118)s_i^3 + \\ &(6968s_0^3s_1^3 + 49905s_0^2s_1^2 + 15816s_0s_1 - 23800)s_i^2 + \\ &60(77s_0^3s_1^3 + 1328s_0^2s_1^2 + 2164s_0s_1 + 512)s_i - \\ &4(1910s_0^4s_1^4 + 21740s_0^3s_1^3 + 69459s_0^2s_1^2 + \\ &34820s_0s_1 + 2048)] \end{aligned}$$

利用(7)–(10)、(17)–(20)和(23)式可以求得

$$\langle f_{y_0}, f_{y_3} \rangle = \int_0^1 f_{y_0}(x)f_{y_1}(x)dx = -\frac{g(s_0, s_1)}{3P(s_0, s_1)}$$

其中

$$\begin{aligned} g(s_0, s_1) = &\sum_{i=0}^1 [16s_i^8 + 280s_i^7 - 4(83s_0s_1 + 35)s_i^6 - \\ &10(190s_0s_1 + 67)s_i^5 + (1768s_0^2s_1^2 + 2845s_0s_1 - 3082)s_i^4 + \\ &10(278s_0^2s_1^2 + 1199s_0s_1 + 638)s_i^3 - 4(841s_0^3s_1^3 + \\ &4055s_0^2s_1^2 + 4542s_0s_1 + 680)s_i^2 + 20(54s_0^3s_1^3 + \\ &418s_0^2s_1^2 + 221s_0s_1 - 16)s_i] + 3340s_0^4s_1^4 + \end{aligned}$$

$7670s_0^3s_1^3 + 1268s_0^2s_1^2 + 1360s_0s_1 + 256 \quad (24)$

自然地，可以获得下面的定理 2。

定理 2 分形插值函数 $f_{v_0}, f_{v_1}, f_{v_2}$ 和 f_{v_3} 构成 S_0 的正交基，当且仅当存在数对 (s_0, s_1) 满足 $|s_i| < 1, s_i \neq \frac{1}{2} (i = 0, 1)$ 和 $g(s_0, s_1) = 0$ 。

由定理 1 和定理 2 获得

推论 1 假定 s_0, s_1 满足 $g(s_0, s_1) = 0, |s_i| < 1, s_i \neq \frac{1}{2} (i = 0, 1)$ ，则 $\{\phi^{(i)}(x); i = 0, 1, 2\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个连续的、紧支撑的正交多尺度分析。

4 构造例子

首先容易验证 $s_0 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6} = s_1$ 时推论 1 成立，利用 (22) 和 (24) 式可算得 $p_1 = -q_2 = -\frac{7-\sqrt{10}}{2}, p_2 = -q_1 = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ ，由此可以确定正交尺度函数。下面考虑尺度函数的双尺度关系。首先由前面的构造过程可以算得

$$\begin{aligned} \phi^{(0)} &= f_{v_1}, \phi^{(1)} = f_{v_2} + \frac{1}{3}f_{v_1}, \\ \phi^{(2)} &= \begin{cases} f_{v_3}(x), & x \in [0, 1), \\ f_{v_0}(x-1), & x \in [1, 2), \\ 0, & x \notin [1, 2) \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

记 $\Phi(x) = (\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)})^T$ ，注意到支撑域，双尺度方程可表示成

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= P_0 \Phi(2x) + P_1 \Phi(2x-1) + \\ &P_2 \Phi(2x-2) + P_3 \Phi(2x-3) \end{aligned} \quad (26)$$

其中， P_i 是 3×3 阶矩阵。利用 $\lambda^{(i)} (i = 0, 1, 2, 3)$ 的表达式和分形插值函数的定义可容易地获得 $f_{v_i} (i = 0, 1, 2, 3)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 点的函数值和导数值，进而确定 (26) 式中的系数矩阵。例如考虑 $\phi^{(0)}(x)$ ，利用函数值 $f'_{v_0}(0^+), f'_{v_0}(0), f'_{v_0}(0.5^+), f'_{v_0}(0^-), f'_{v_0}(1)$ 和 $f'_{v_0}(1^-)$ ，可获得方程 $2c_0 + \frac{2}{3}c_1 + 2q_1c_2 = 1, c_2 = \frac{1}{8}, 2c_1 + 2q_2c_2 = (4s-1)\frac{1}{2}, c_5 = 0, p_2c_2 + c_4 = 0$ 和 $2p_1c_2 + 2c_3 + \frac{2}{3}c_4 = (4s-1)\frac{1}{2}$ 。注意到 $\phi^{(0)}(x) = f_{v_1}(x)$ 的支撑域为 $[0, 1]$ ，求解可以得到 $\phi^{(0)}(x)$ 的双尺度表达式为

$$\phi^{(0)}(x) = \frac{58-\sqrt{10}}{72}\phi^{(0)}(2x) + \frac{-17+11\sqrt{10}}{48}\phi^{(1)}(2x) +$$

$$\frac{1}{8}\phi^{(2)}(2x) + \frac{14+3\sqrt{10}}{24}\phi^{(0)}(2x-1) - \frac{3+\sqrt{10}}{16}\phi^{(1)}(2x-1)$$

类似可以获得 $\phi^{(1)}$ 和 $\phi^{(2)}$ 的双尺度表达式，获得的 P_i 结果为

$$\begin{aligned} P_0 &= \begin{bmatrix} \frac{58-\sqrt{10}}{72} & \frac{-17+11\sqrt{10}}{48} & \frac{1}{8} \\ \frac{2+7\sqrt{10}}{36} & \frac{7+11\sqrt{10}}{24} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{50+19\sqrt{10}}{72} & -\frac{35+7\sqrt{10}}{48} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}, \\ P_1 &= \begin{bmatrix} \frac{14+3\sqrt{10}}{24} & \frac{-3+\sqrt{10}}{16} & 0 \\ -\frac{14+9\sqrt{10}}{36} & \frac{15+\sqrt{24}}{24} & 0 \\ \frac{24+7\sqrt{10}}{24} & -\frac{25+5\sqrt{10}}{16} & 1 \end{bmatrix}, \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{110-11\sqrt{10}}{72} & \frac{5-23\sqrt{10}}{48} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}, \\ P_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{41-\sqrt{10}}{48} & \frac{-15+5\sqrt{10}}{16} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] MALLATS S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$ [J]. Trans Amer Math Soc, 1989, 315: 69-87.
 - [2] MEYER Y. Ondelettes et Opérateurs [M]. Paris: Hermann, 1989.
 - [3] GOODMAN T N, LEE S L. Wavelets of multiplicity r [J]. Trans Amer Math Soc, 1994, 342(1): 307-324.
 - [4] GERONIMO J S, HARDIN H P, MASSOPUST P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions [J]. J Approx Theory, 1994, 78: 373-401.
 - [5] HARDIN D P, KESSLER B, MASSOPUST P R. Multiresolution analyses based on fractal functions [J]. J Approx Theory, 1992, 71: 104-120.
 - [6] CHUI C K. An Introduction to Wavelets [M]. Boston: Academic Press, 1992.
 - [7] DONOVAN G C, GERONIMO J S, HARDIN H P. Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions [J]. SIAM J Math Anal, 1996, 27: 1158-1192.
 - [8] 张彬, 王卫卫, 宋国乡. 利用分形插值函数构造多小波尺度函数的一个新方法 [J]. 工程数学学报, 2002, 19(1): 55-60.
- (下转第 19 页)

Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR' 02), Quebec City, Canada, August 2002; 272—276.

[7] GUN S S, KANG M G. Ringing artifact reduction in the wavelet-based denoising [C] // IEEE ICASSP2004, May 2004, Montreal, Quebec.

[8] GROSSMANN A , HOLSCHNEIDER M , KRONLAND - MARTINET R, et al. Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms[J] . Advances in Electronic and Electron Physics Supplement: Inverse Problems, 1987, S19; 289—306.

Ringing Artifacts Reduction in Adaptive Wavelet Threshold Denoising

YANG Tan, ZHOU Hua yu, GUAN Lü tai

(Department of Scientific Computation and Computer Applications, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The reason of ringing artifacts appearing near the discontinue points in denoised signal is analyzed by traditional wavelet shrinkage methods. Based on the different origins, the ringing artifacts are devided into two classes. One class is Pseudo Gibbs phenomena and the other class is the remnant noise. To reduce these artifacts, a new threshold function and a new adaptive algorithm are obtained which could handle wavelet coefficients flexibly. Numerical experiments show that presented method can significantly depress ringing artifacts.

Key words: wavelet; signal denoise; ringing artifacts; threshold function

(上接第 14 页)

Construction of Orthogonal Multiresolution Analysis Using Quadratic Fractal Interpolation Functions

DENG Xiao yan, LONG Guang qing

(Department of Scientific Computing and Computer Application, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A method for constructing a continuous, supported and orthogonal scale functions using quadratic fractal interpolation functions is given, differing from orthogonal wavelets constructed by AFI's, scale functions have differentiability and can be used to set up numerical scheme for differential equation.

Key words: multiwavelet; fractal interpolation function; orthogonal multiresolution analysis