

用 Mathematica 语言演示 Lorenz 吸引子^{*}

姜 宇, 姜正禄
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 首先介绍了 Lorenz 吸引子, 接着通过对 Lorenz 方程组进行特征分析, 得到了方程的 3 个奇点, 并由此对 Lorenz 吸引子做了分类。随后, 给出了一种用 Mathematica 演示 Lorenz 吸引子的方法, 编制出一个立体动态演示 Lorenz 吸引子的程序。最后, 绘制出验证蝴蝶效应的图形以观察初始条件的微小变化对 Lorenz 吸引子产生的影响。

关键词: Lorenz 方程; Lorenz 吸引子; Mathematica; 蝴蝶效应
中图分类号: O175.24 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) SI-0130-03

Lorenz 吸引子是混沌现象研究的标志性成果之一。本文将介绍 Lorenz 吸引子, 分析 Lorenz 方程组的特征, 用 Mathematica 软件来静态和动态演示 Lorenz 吸引子, 并用它来验证蝴蝶效应。

1 Lorenz 吸引子

1963 年, 美国大气物理学家 Lorenz 研究对流实验, 得到了一个描述大气运动变化规律的数学模型^[1]。经过傅立叶分解、截断, 并无量纲化, 这个模型便化为一个三维的常微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + ay & (1) \\ \frac{dy}{dt} = cx - y - xz & (2) \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy & (3) \end{cases}$$

这个著名的方程组被称为 Lorenz 方程组^[2]。用计算机模拟出上述方程组的解的三维图像, 会得到一条自身不会重叠或相交的双叶螺旋轨线, 即 Lorenz 吸引子。上世纪 60 年代, Lorenz 就采用了数值迭代的方法, 用计算机绘制出二维的吸引子图像。而本文利用数学工具 Mathematica 求解微分方程是一种较为方便的方法, 不仅求解速度快, 同时对解决同类问题具有通用性^[3]。

首先, Lorenz 方程组的三个参数, a, b, c 会对吸引子形状的确定造成很大的影响。这种因参数的不同而形成的吸引子结构主要可分为 3 类:

1. 经典的 Lorenz 吸引子图形, 比如, 取 $a=10, b=8/3, c=28$, 由该 Lorenz 方程组所确定的点轨迹收敛且有不动点, 整个图形不含“空腔”, 如图 1 (1) 所示。

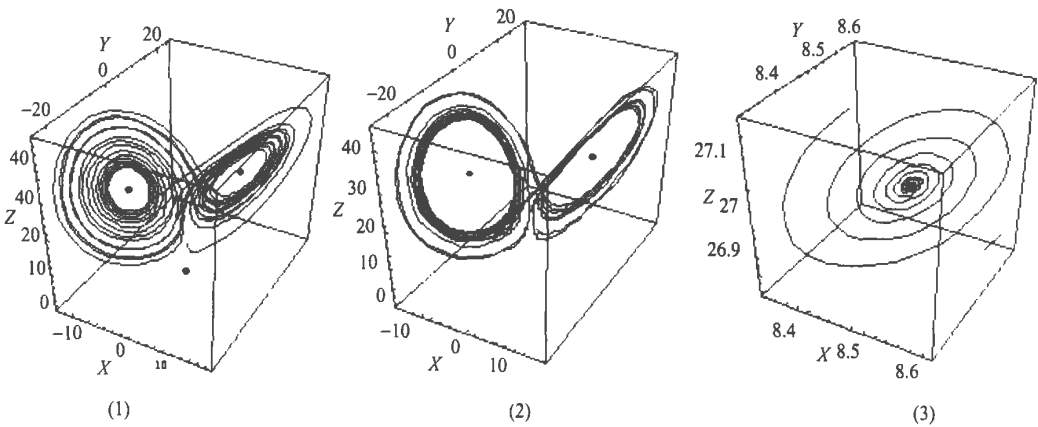


图 1 三类 Lorenz 吸引子
Fig 1 Three classes of the Lorenz attractors

2. 点轨迹进入“黑洞”, 停留在固定的“8”字封闭轨迹上, 图形含有“空腔”, 如图 1 (2) 所示。例如, 可以选取如下三种情形, 都能得到这类图形: $b=8/3$, $c=28$, $a=5.182$ 或 $a=22.1$; $a=10$, $c=28$, $b=0.8$ 或 3.9 ; $a=10$, $c=22.46$, $b=8/3$ 。

3. 点轨迹收敛于单个不动点, 如图 1 (3) 所示。比如, $b=8/3$, $c=28$, $a=61.8$ 或 61.9 。

接下来, 用常微分方程的知识对 Lorenz 方程组进行进一步的讨论。可以先求出 Lorenz 方程组的奇点, 当 $a \neq 0$ 且 $b(c-1) \geq 0$ 时可以得到三个奇点: $O(0, 0, 0)$, $L^+(\sqrt{b(c-1)}, \sqrt{b(c-1)}, c-1)$ 和 $L^-(\sqrt{b(c-1)}, \sqrt{b(c-1)}, c-1)$ 。然后, 用线性近似的方法讨论这三个奇点的稳定性。Lorenz 方程组的线性近似方程组的特征方程为 $(\lambda+b)[(\lambda+a)(\lambda-1)-ac]=0$, 其 3 个特征值分别为 $\lambda_1=-b$, $\lambda_2=[-1-a-\sqrt{(1-a)^2+4ac}]/2$ 和 $\lambda_3=[-1-a+\sqrt{(1-a)^2+4ac}]/2$ 。因为 $a>0$ 且 $c \geq 1$, 所以可知 λ_3 为正根; 又因为 λ_1 和 λ_2 为负根, 故点 $O(0, 0, 0)$ 为鞍点。为判断 L^+ , 只需将变量平移, 即令 $x_1=x-\sqrt{b(c-1)}$, $y_1=y-\sqrt{b(c-1)}$, $z_1=z-(c-1)$, 代入方程组, 再用同样的步骤可求得线性近似方程组的三个特征值, 其中两个特征值具有正的实部, 另一个特征值具有负的实部, 因此 L^+ 点为不稳定焦点。同理可判断出 L^- 也为不稳定焦点。所以经典的 Lorenz 吸引子会尽量远离 O 点, 并在 L^+ , L^- 之间不断绕行 (参见图 1 (1))。

2 Mathematica 演示

对 Lorenz 吸引子进行 Mathematica 演示, 分两方面进行: 首先是绘制静态演示吸引子的三维图像, 随后再利用 Mathematica 软件的特殊功能, 给出动态演示吸引子的绘制过程。

(1) 绘制 Lorenz 吸引子

给出一组经典参数 $a=10$, $b=8/3$, $c=28$; 以及初值 $(x, y, z)=(0, 0.5, 8)$, 其语言如下: $\{a, b, c\}=\{10, 8/3, 28\}$; $\{x_0, y_0, z_0\}=\{0, 0.5, 0.8\}$; 再利用函数 NDSolve 求解微分方程组, 将其保存在表 T 内。这一操作采用如下的语言:

```
T = NDSolve[{x'[t] == -a(x[t] - y[t]),
y'[t] == -x[t] * z[t] + c * x[t] - y[t],
z'[t] == x[t] * y[t] - b * z[t], x[0] == x0, y[0] == y0,
z[0] == z0, {x, y, z}, {t, 0, 20}, MaxSteps -> 3000];
```

然后, 用绘图函数 ParametricPlot3D 画出吸引子的轨线并保存为图形元素 p1, 其中嵌套的函数 Evaluate 的作用是先求出表达式的值, 再进行计算。其他参

数选项的具体设置请参阅文[4], 具体程序如下:

```
p1 = ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t]} /. T], {t, 0, 20}, PlotPoints -> 1000, DisplayFunction -> Identity];
```

再用函数 Point 画出系统平衡点的位置, 并用函数 PointSize 调整其大小, 保存为图形元素 p2:

```
p2 = Graphics3D[{PointSize[0.025], Point[0, 0, 0], Point[{b(c-1)^(1/2), (b(c-1))^(1/2), (c-1)}], Point[{b(c-1)^(1/2), (b(c-1))^(1/2), (c-1)}]}]
```

完成上述准备工作后, 就可以用 Show 函数将前面两个图形元素显示出图 1 (1), 其格式如下:

```
Show[{p1, p2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction, AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"}];
```

通过以上步骤, 得到一个 Lorenz 吸引子立体图形。进一步, 可以观察其关于时间的变化情况, 只需做相似的处理。

```
ParametricPlot[{t, Evaluate[x[t] /. T[[1, 1]]], {t, 0, 20}, PlotPoints -> 1000, AxesLabel -> {"t", "X"}];
```

运行上述 Mathematica 语句后得到图 2。

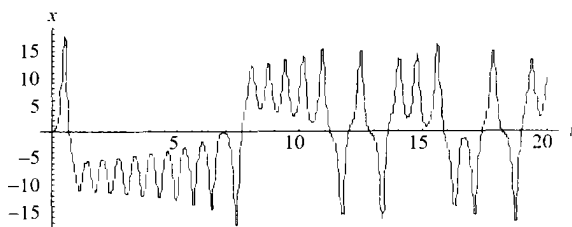


图 2 x 关于时间 t 的变化

Fig. 2 The change of x with respect to t

最后, 利用 Mathematica 的 Module 函数封装功能, 将前面的代码进行封装^[4]。编写成完整的函数 $\text{Lorenz}[a, b, c, x_0, y_0, z_0]$, 此函数的变量为参数 a, b, c , 以及初值 (x_0, y_0, z_0) 。

(2) 动态演示吸引子

这里提供一种简便的动画演示方法: 利用 Table 函数生成一组图片, 每幅图片都是在前一幅图片的基础上将轨迹增加一部分, 然后将其连续播放。其中选项 PlotRange 的作用是调整每幅图片具有相同的尺寸。具体程序如下:

```
Table[Show[{ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. T], {t, 0, n}, PlotPoints -> 1000, DisplayFunction -> Identity], Graphics3D[{PointSize[0.025], Point[{b(c-1)^(1/2), (b(c-1))^(1/2), c-1}], Point[{b(c-1)^(1/2), (b(c-1))^(1/2), c-1}]}], {n, 1, 20}];
```

2), (c-1) }], Point[{b (c-1) ^ (1/2), (b (c-1)) ^ (1/2), (c-1) }]], DisplayFunction \[Rule] \$
DisplayFunction, PlotRange -> {{-30, 30}, {-31, 30}, {0, 60}}, {n, 0.2, 20, 0.2}];

3 应用——验证蝴蝶效应

“蝴蝶效应”这个名词由 Lorenz 于 1979 年在华盛顿的一次学术报告中首先使用。当时他形象地提出了这样一个问题:“巴西上空的一只蝴蝶偶尔扇动几下翅膀,是否可能在数周后引起美国得克萨斯州的一场风暴?”这说明 Lorenz 方程的解对初始值有高度的敏感性。为验证这一点,对 y 初始值稍作修改,例如由 2 改为 2.01 和 1.99,然后比较 z 关于时间的变化情况。具体程序如下:

```
LorenzTable[ a_, b_, c_, x0_, z0_] := NDSolve[
{x'[t] == -x[t] z[t] + c x[t], y'[t] == x[t] y[t] - b z[t], x[0] == x0, z[0] == z0, y[0] == y0}, {x, y, z}, {t, 0, 20}, MaxSteps -> 3000];
```

```
Butterfly[y0_, y1_, y2_] := Module[ {T1, T2, T3,
p1, p2, p3}, {T1 = LorenzTable[ 5.182, 8/3, 28, 0, y0, 8];
T2 = LorenzTable[ 5.182, 8/3, 28, 0, y1, 8];
T3 = LorenzTable[ 5.182, 8/3, 28, 0, y2, 8];
```

```
p1 = ParametricPlot[ {t, Evaluate[ z[t] /. T1[[1, 3]]]}, {t, 0, 20},
DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> RGBColor[ 0, 0, 1]];
p2 = ParametricPlot[ {t, Evaluate[ z[t] /. T2[[1, 3]]]}, {t, 0, 20},
DisplayFunction -> Identity,
```

```
PlotStyle -> RGBColor[ 0, 1, 0]];
p3 = ParametricPlot[ {t, Evaluate[ z[t] /. T3[[1, 3]]]}, {t, 0, 20},
DisplayFunction -> Identity,
```

```
PlotStyle -> RGBColor[ 1, 0, 0]];
Show[ {p1, p2, p3}, DisplayFunction -> $DisplayFunction, AxesLabel -> {"t", "Z"}];
```

Butterfly[2, 1.99, 2.01];

运行以上三段程序,便可得图 3。由图 3 可知,数值解差别越来越大。

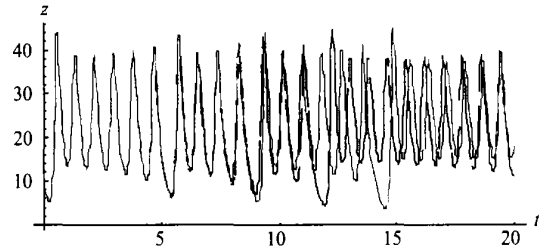


图 3 三条曲 z 线

Fig. 3 Three curves of z

4 结 语

本文利用 Mathematica 软件求解微分方程组,并绘制出 Lorenz 吸引子以及动态演示对蝴蝶效应的验证。然而对 Lorenz 吸引子的研究工作远没有穷尽。还有更多相关的理论和实际的未知领域等待我们去进一步探索和发掘。

参考文献:

- [1] LORENZ E N. Deterministic non-periodic flows[J]. Atmos Sci, 1963, 20: 130-141.
- [2] 张亚刚, 张成. Lorenz 组结[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2004, 26(1): 44-46.
- [3] 吴朝晖, 危启正. 用 Matlab 5.3 求解洛伦兹方程[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版), 2002, 25(4): 335-338.
- [4] 丁大正. 科学计算强档 Mathematica 4 教程[J]. 北京: 电子工业出版社, 2002.
- [5] 刘华杰. 分形艺术[M]. 长沙: 湖南电子音像出版社, 1997.
- [6] 裘宗燕. Mathematica 数学软件系统及其程序设计[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999.
- [7] 李尚志, 陈发来, 吴耀华, 等. 数学实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [8] 何岱海, 徐健学, 陈永红. 常微分方程系统李雅普诺夫特性指数的研究[J]. 物理学报, 2000, 49(5): 833-837.

Display the Lorenz Attractors with Mathematica

JIANG Yu, JIANG Zheng-lu

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The Lorenz attractors are first introduced. Then three singular points of the Lorenz equations are shown by analyzing their eigenvalues and so the Lorenz attractors are classified. After that, a method is given to display statically the Lorenz attractors by using Mathematica and a program is designed to display dynamically the Lorenz attractors in the three-dimensional space. Finally, a figure of the verification of the butterfly effect is plotted in order to observe the influence of the minute differences of the initial information on the Lorenz attractors.

Key words: Lorenz equations; Lorenz attractor; Mathematica; butterfly effect