

非恒同主从耦合混沌系统一致同步的判据^{*}

王建根

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 当主从混沌系统的参数矩阵不匹配时, 一般意义上的混沌同步难以实现, 因此, 讨论其具有一定误差界的一致同步问题。对一类包含 Lur'e 系统和 Lipschitz 系统在内的混沌系统, 利用 Lyapunov 方法构造了一个状态反馈控制方案, 得到了该类主从耦合混沌系统一致同步的一个充分条件, 并讨论了同步的鲁棒性问题。最后结合 Chua's 电路进行了数值模拟。

关键词: 主从耦合系统; 一致有界混沌同步; Chua's 电路

中图分类号: O231.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 02-0019-04

混沌同步的应用前景推动了对这一问题的研究。近年来, 对主从耦合系统的混沌同步问题的研究大多是围绕恒同主从系统展开的(见文[1—5])。事实上, 在实际应用中, 除了需要研究完全恒同的主从系统的同步问题, 还需要考虑非恒同的情形。因此, 又有关于非恒同主从系统同步的一些结果(见文[6])。文[7, 8]研究了2个耦合混沌系统, 得到了关于其全局同步的一个简单判据。本文在文[6—8]的基础上提出了非恒同主从耦合系统一致同步问题, 并得到了一个判断它们一致同步的充分条件。

考虑以下耦合主从混沌系统

$$M: \dot{x} = A_1 x + g(x) + u \quad (1)$$

$$S: \dot{z} = A_2 z + g(z) + u + K(x - z) \quad (2)$$

这里 $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $u \in \mathbf{R}^n$ 是外部输入向量, A_1 、 A_2 是常数矩阵。

$$K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\},$$

$$k_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

是需要设计的反馈矩阵。 $g(x)$ 是一个连续非线性函数, 假设它满足

$$g(x) - g(z) = M_{x,z}(x - z) \quad (3)$$

这里, $M_{x,z}$ 是一个有界矩阵, 其元素依赖于 x 、 z 。

大多数混沌系统, 包括所有的 Lur'e 系统和 Lipschitz 系统, 都可表示为上述形式(参见文[7, 8]注)。本文后面的例子也将给出一个具体的解释。

对前述系统, 定义误差系统为:

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

即:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_1 x - A_2 z + g(x) - g(z) - K e(t) = \\ &= (A_2 - K) e + [g(x) - g(z)] + \Delta A x \end{aligned}$$

即:

$$\dot{e}(t) = (A_2 - K) e + [g(x) - g(z)] + \Delta A x \quad (4)$$

这里, $\Delta A = A_1 - A_2$ 。

1 一致同步的判据

为了得到关于混沌同步的判据, 先引入误差系统中关于非线性项、系数矩阵和主系统状态向量的2个假设。

假设1 存在一个正实数 δ , 对任何初值 x_0 , 都存在时间 $T(x_0)$ 使得

$$\|x(t; x_0)\| \leq \delta \quad \forall t \geq T \quad (5)$$

以上假设参见文[1, 7, 8]。从实际观点来看, 在讨论混沌系统时, 我们仅对具有有界轨线的系统感兴趣, 所以这种假设是合理的。

假设2 存在一个较小的正数 α 使得 $\|\Delta A\| \leq \alpha$ 。

本文讨论的主从耦合混沌系统是非恒同的, 在主从系统之间存在参数的不匹配。这里假定 $\|A_1 - A_2\|$ 是很小的数。对于非恒同主从系统, 二者之间的同步误差将不再渐近于0, 因此, 有下面的具误差界 ϵ 一致同步的概念^[6]。

定义1 称主从系统(1) — (2) 是具误差界 ϵ 一致同步的, 如果存在一个 $\delta_0 > 0$ 和一个 $T \geq 0$

* 收稿日期: 2004—05—01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371136); 广东省自然科学基金资助项目(021765)

作者简介: 王建根(1964年生), 男, 博士生, 佛山职业技术学院副教授, E-mail: openedu@163.com

使得如果 $\|x(0) - z(0)\| \leq \delta_0$, 则有 $\|x(t) - z(t)\| \leq \epsilon$ 对所有的 $t \geq T$ 成立。

我们的目标是通过设计控制器 K 使主从系统在上述意义上同步, 且这种同步关于参数的不匹配具有好的鲁棒性。

在以下的分析中, 选取 Lyapunov 函数为:

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t) \tag{6}$$

其中, 矩阵 $P = P^T > 0$

则有

$$\begin{aligned} V(e(t)) &= \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)\dot{P}e(t) = \\ &= \{(A_2 - K)e(t) + [g(x) - g(z)] + \Delta Ax\}^T Pe(t) + e^T(t)P\{(A_2 - K)e(t) + \\ &+ [g(x) - g(z)] + \Delta Ax\} = \{(A_2 - K)e(t) + \\ &+ [g(x) - g(z)]\}^T Pe(t) + \\ &+ e^T(t)P\{(A_2 - K)e(t) + [g(x) - g(z)]\} + \\ &+ (\Delta Ax)^T Pe(t) + e^T(t)P\Delta Ax = \\ &= \{e^T(t)[(A_2 - K)^T P + P(A_2 - K)]e(t) + \\ &+ (g(x) - g(z))^T Pe(t) + e^T(t)P[g(x) - \\ &+ g(z)]\} + \{(\Delta Ax)^T Pe(t) + e^T(t)P\Delta Ax\} = \\ &= e^T(t)[(A_2 - K)^T P + P(A_2 - K)]e(t) + \\ &+ e^T(t)M_{x,z}^T Pe(t) + e^T(t)PM_{x,z}e(t) + \\ &+ x^T(\Delta A)^T Pe(t) + e^T(t)P\Delta Ax = \\ &= e^T(t)[(A_2 - K + M_{x,z})^T P + \\ &+ P(A_2 - K + M_{x,z})]e(t) + \\ &+ x^T(\Delta A)^T Pe(t) + e^T(t)P\Delta Ax \end{aligned}$$

由假设,

$$\begin{aligned} \|x^T(\Delta A)^T Pe(t) + e^T(t)P\Delta Ax\| &\leq \\ 2\|x\|\|\Delta A\|\|P\|\|e\| &\leq \\ 2\bar{\alpha}\|P\|\|e\| &\leq 2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)\|e\| \end{aligned}$$

所以, 若取

$$Q = (A_2 - K + M_{x,z})^T P + P(A_2 - K + M_{x,z})$$

则有

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq e^T(t)Qe(t) + 2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)\|e\| \leq \\ \lambda_{\max}(Q)\|e\|^2 + 2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)\|e\| \end{aligned}$$

在以上论述的基础上, 可得到以下结论:

定理 1 在假设 1、2 的前提下, 若存在正定矩阵 P 与矩阵 K 使得

$$\lambda_{\max}(Q) < 0 \tag{7}$$

成立, 则主从系统(1)–(2)可达到具有误差界 c_2 的一致同步。这里

$$c_2 = -2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)k(P)/\lambda_{\max}(Q)$$

其中, $k(P) = \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)$ 为矩阵 P 的条件数。

证明 由定理条件得,

$$V(e(t)) \leq e^T(t)Qe(t) + 2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)\|e\| \leq$$

$$\lambda_{\max}(Q)\|e\|^2 + 2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)\|e\| =$$

$$\|e\| \cdot [\lambda_{\max}(Q)\|e\| + 2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)]$$

后一项为负, 若 $\|e\| > -2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)$ 。故在 $\|e(t)\| > -2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)$ 的地方有 $V(e(t)) < 0$, 即在超球

$$\mathcal{B} = \{e \mid \|e(t)\| \leq -2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)\}$$

外误差系统的轨线将呈下降走向。适当选取正数 c , 使 Lyapunov 函数水平集

$$\epsilon_0 = \{e \mid e^T(t)Pe(t) \leq c\}$$

为包含超球域

$$\mathcal{B}_1 = \{e \mid \|e(t)\| \leq -2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)\}$$

的最小的水平集, 则误差系统的轨线 $e(t)$ 总会进入该水平集 ϵ_0 。于是, 对任一初始条件, 误差系统的极限集是非空、有界闭集并且属于超椭圆 ϵ_0 , 因此, 主从系统可以达到具有比 c_2 更小的误差界的一致同步。如图 1 所示,

$$c_2 = -2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)k(P)/\lambda_{\max}(Q)$$

其中 $k(P) = \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)$ 为矩阵 P 的条件数, $\bar{\alpha}, \alpha$ 如前定义。

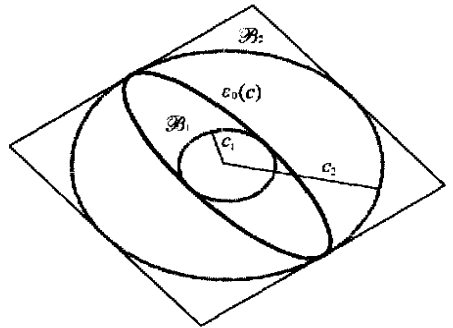


图 1 一致同步的误差界

Fig. 1 Error bound of the uniformly synchronization

$$\mathcal{B}_1 = \{e \mid \|e(t)\| \leq -2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)\} \subseteq$$

$$\epsilon_0 = \{e \mid e^T(t)Pe(t) \leq c\} \subseteq$$

$$\mathcal{B}_2 = \{e \mid \|e(t)\| \leq c_2\}$$

这里, c_2 是包含水平集 ϵ_0 的最小超球的半径。

在上述基础上, 可得以下定理 2。

定理 2 在假设 1、2 的前提下, 若存在正定矩阵 P 以及一个正的实常数 β 与矩阵 K 使得矩阵不等式:

$$\begin{aligned} (A_2 - K + M_{x,z})^T P + \\ P(A_2 - K + M_{x,z}) + \beta I < 0 \end{aligned} \tag{8}$$

则主从系统(1)–(2)可达到具有误差界 c_2 的一致同步。这里

$$c_2 = -2\bar{\alpha}\lambda_{\max}(P)k(P)/\beta$$

其中, $k(P) = \lambda_{\max}(P) / \lambda_{\min}(P)$ 为矩阵 P 的条件数。

证明 由定理条件得, $Q + \beta I < 0$, 所以

$$\begin{aligned} e^T Q e + \beta e^T e &< 0, \\ e^T Q e &< -\beta e^T e < -\beta \|e\|^2 \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} V &< -\beta \|e\|^2 + 2 \alpha \lambda_{\max}(P) \|e\| = \\ &\|e\| [-\beta \|e\| + 2 \alpha \lambda_{\max}(P)] \end{aligned}$$

类似定理 1 的证明, 可得结论成立。

注 1 在定理 1 的基础上, 可以导出同步误差界 ε 与参数不匹配界限 α 之间的不确定关系:

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = 2 \lambda_{\max}(P) k(P) / \lambda_{\max}(Q) \equiv c_0$$

它说明同步误差界与参数的不匹配界限大致呈正比关系。因此, 为达到鲁棒性要求, 我们的目标是在满足矩阵不等式 $Q < 0$ 的前提下最小化 c_0 , 它是下述约束最优化问题:

$$\begin{aligned} \min_P & \lambda_{\max}(P) k(P) / \lambda_{\max}(Q) \\ & \lambda_{\max}(Q) < 0 \\ & P = P^T > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

注 2 定理 1 考虑了主从系统线性部分不匹配时的一致同步问题, 如果非线性部分也存在不匹配, 并且有类似 (3) 式的条件得到满足, 则也有相应的一致同步结论。

由文献 [7] 中的结论, 可得

推论 若取 $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, 并令

$$\bar{a}_{ij} = (A_2 + M_{x,z})^T P + P(A_2 + M_{x,z}),$$
$$R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |\bar{a}_{ij}|$$

若取 K 满足

$$k_i > \frac{1}{2p_i} (\bar{a}_{ii} + R_i) \tag{10}$$

则定理 1 结论成立。

2 非恒同 Chua's 电路的数值模拟

考虑 Chua's 电路

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= c(x_2 - x_1 - f(x_1)) + 0.1x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_2 \end{aligned}$$

其中, $c > 0, \beta > 0, a < b < 0$, 非线性项

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|)$$

将该系统作为主系统, 其矩阵形式为:

$$\dot{x} = A_1 x + g(x)$$

其中,

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T,$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} -c+0.1 & c & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} -cf(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从系统可取为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= c(z_2 - z_1 - f(z_1)) + k_1(x_1 - z_1) \\ \dot{z}_2 &= z_1 - z_2 + z_3 + k_2(x_2 - z_2) \\ \dot{z}_3 &= -\beta z_2 + k_3(x_3 - z_3) \end{aligned}$$

写成矩阵形式, 即:

$$\dot{z} = A_2 z + g(z) + K(x - z)$$

其中,

$$z = (z_1, z_2, z_3)^T,$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} -c & c & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad g(z) = \begin{bmatrix} -cf(z_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

于是, 误差系统

$$\dot{e}(t) = (A_2 - K)e + [g(x) - g(z)] + \Delta Ax$$

中, $\Delta A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 注意到可取 k_{x_1, z_1} 满足

$$f(x_1) - f(z_1) = k_{x_1, z_1}(x_1 - z_1) \tag{11}$$

其中, k_{x_1, z_1} 依赖于 x_1, z_1 , 并在区间 $[a, b]$ 中变化, 即 $a \leq k_{x_1, z_1} \leq b < 0$ (如图 2 所示)。

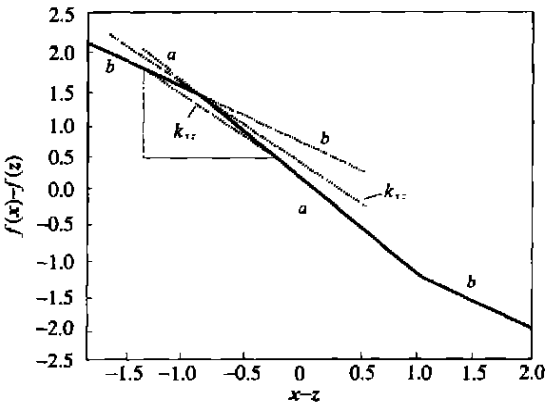


图 2 Chua's 电路中 k_{x_1, z_1} 的存在性

Fig 2 The existence of k_{x_1, z_1} in Chua's circuits

则有,

$$g(x) - g(z) = \begin{bmatrix} -c(f(x_1) - f(z_1)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{x_1, z_1}(x_1 - z_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{x_1, z_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ x_3 - z_3 \end{bmatrix} = M_{x,z} e$$

于是，若取 $P=I$ ，则

$$(A_2 + M_{x,z})^T P + P(A_2 + M_{x,z}) = \begin{pmatrix} -2c - 2ck_{x_1,z_1} & c+1 & 0 \\ c+1 & -2 & 1-\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 \end{pmatrix}$$

由推论可知，可取

$$k_1 \geq \frac{1}{2}(-2c - 2ck_{x_1,z_1} + |1+c|)$$

$$k_2 \geq \frac{1}{2}(-2 + |1+c| + |1-\beta|)$$

$$k_3 \geq \frac{1}{2}|1-\beta|$$

图 3 为参数 $\beta = 14.97, a = -1.31, b = -0.75, c = 9.78$ 时主从系统的误差曲线。

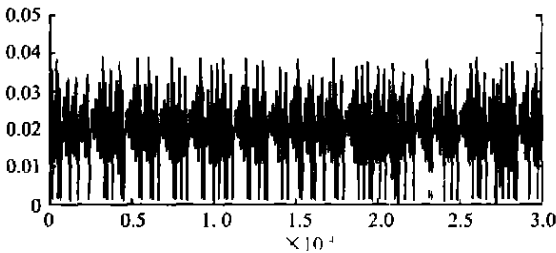


图 3 误差曲线

Fig. 3 System errors

由图 3 可以看出，此时，主从系统达到一致同步，从而验证了定理的结论，这里，根据推论，取 $k_1 = 9, k_2 = 12, k_3 = 8$ 。

3 结 语

本文利用 Lyapunov 方法讨论了非恒同主从耦合混沌系统之间具一定参数误差时的一致同步问题。给出了其一致同步的状态反馈控制方法，并讨论了同步的鲁棒性，得到了一致同步的充分条件，结合 Chua's 电路进行了数值模拟。

进一步的讨论可以考虑一致同步误差界的更精确估计等问题。

参考文献:

[1] CURRAN P F, CHUA L O. Absolute stability theory and the synchronization problem[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1997, 7(6): 1375—1383.

[2] SUYKENS J A K, CURRAN P F, CHUA L O. Master-slave synchronization using dynamic output feedback[J]. Int J Bifurcation and Chaos 1997, 7(3): 671—679.

[3] WU C W, CHUA L O. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems[J]. Int J Bifurcation and Chaos 1994, 4(4): 979—998.

[4] CHEN G R. <http://www.ee.cityu.edu.hk/~gchen/chaos-bifur-journals.html>[EB/OL].

[5] BOCCALETTI S, KURTHS J, OSIPOV G, et al. The synchronization of chaotic systems[J], Physics Reports 2002, (366): 1—101.

[6] SUYKENS J A K, CURRAN P F, CHUA L O. Robust synthesis for master-slave synchronization of Lur'e systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems—1: Fundamental Theory and Applications 1999, 46(7): 841—850.

[7] JIANG G P, TANG W K S, CHEN G R. A simple global synchronization criterion for coupled chaotic system[J]. Chaos, Solitons and Fractals 2003, 15(5): 925—935.

[8] JIANG G P, CHEN G R, TANG W K S. A new criterion for chaos synchronization using linear state feedback control[J]. Int J Bifurcation and Chaos 2003, 13(8): 2343—2351.

Uniformly Synchronization Criterion for Non-identical Coupled Master-Slave Chaotic System

WANG Jian gen

(Department of Mathematics, Sun yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: It is impossible to get synchronization when there are mismatch in the parameter matrices of the master-slave chaotic systems, so the uniformly synchronization with a bound on the synchronization error is discussed here. A method for master-slave synchronization of two coupled chaotic systems with a unidirectional error feedback coupling is presented. Parameter mismatch between the systems is considered in the synchronization scheme. Sufficient conditions for uniformly synchronization with a bound on the synchronization error are derived for a class of chaotic systems which include Lur'e system and Lipschitz system based on a quadratic Lyapunov function. The robustness of the scheme is discussed, and then the scheme is illustrated on Chua's circuit with the double scroll. One observes that it is possible to synchronize the master-slave systems with parameter mismatch up to a relatively small error bound.

Key words: coupled chaotic system; uniformly synchronization; Chua's circuit