

五次二重样条小波的微分方程自适应正交配置^{*}

钟一兵¹, 舒适², 关履泰¹

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275;

2. 湘潭大学数学系, 湖南 湘潭 411105)

摘要: 对于五次二重样条插值快速求解算法, 在能量内积意义下通过建立对偶小波, 刻划了函数值和小波展式系数之间的关系, 进而得到了它的奇性检测性质。最后将该格式用于构造求解微分方程的自适应正交配置算法。

关键词: 样条小波; 对偶小波; 奇性检测; 自适应

中图分类号: 0241.82 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2005)02-0023-04

配置法是微分方程求解的一个常用方法, 近年有许多研究文章^[1-5]。由于样条配置格式的超收敛性, 样条配置法是微分方程配置法的一个活跃方向^[1]。小波在构造微分方程自适应快速求解算法方面具有独特的应用价值^[2]。样条小波兼具了样条和小波的良好特征, 蔡伟^[3]得到了求解微分方程初边值问题的自适应样条小波结点配置算法。而利用多重样条(如 Hermite 样条)作正交配置格式可以达到更高的逼近阶。舒适^[4]构造了关于三次二重样条小波和五次二重样条小波的具有继承性的样条插值快速求解算法, 对于三次二重样条小波快速插值算法给出了它的奇性检测性质, 得到了求解微分方程初边值问题的自适应样条小波正交配置算法。本文在文[4]的基础上, 通过建立对偶小波, 刻划了函数值和小波展式系数之间的关系, 获得了对五次二重样条小波快速插值算法的奇性检测性质。并将该性质用于构造求解非线性微分方程初边值问题的自适应样条小波正交配置算法。

1 五次二重样条小波快速插值算法

本节中的结果属于文[4]。首先在讨论区间 I 上引入如下的能量内积:

$$\langle f, g \rangle = \int_I f^{(3)}(x) g^{(3)}(x) dx$$

本文以文[4]中的3个五次二重函数 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_b(x)$ 作为尺度函数和边界尺度函数。令:

$$V_j = \text{span}\{ \phi_{l,j,k}(x), \phi_{b,j}(x), \phi_{b,j}(N-x) \mid j \in \mathbf{Z}^+, l = 1, 2; k = 0, \dots, 2^j N - 3 \}$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{l,j,k}(x) &= \phi_l(2^j x - k), \\ \phi_{b,j}(x) &= \phi_b(2^j x) \end{aligned}$$

以文[4]中关于 $3/2$ 点为偶对称和奇对称的函数 $\psi(x)$, $\Psi(x)$ 及函数 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ 分别作为小波函数和边界小波函数(支集为 $[0, 3]$)。它们具有以下性质:

性质1 (点消失矩性质)

$$\psi(n) = \Psi(n) = 0, v = b_1, b_2, 1, 2, n \in \mathbf{Z}$$

下面是自适应五次二重样条小波快速插值算法。不妨假设讨论区间为 $I = [0, L]$, $L \in \mathbf{Z}^+$ 。这里所说的插值是 Hermite 插值, 即插值函数和被插函数在结点上的函数值和导数值都相等。首先构造小波空间 W_j 。记:

$$\begin{aligned} n_j &= 2^j L, \\ W_j &= \text{span}\{ \psi_{j,k}(x) \mid j \in \mathbf{Z}^+, \\ & \quad l = 1, 2, k = -1, \dots, n_j - 2 \} \end{aligned}$$

其中, $\psi_{j,-1}(x) = \psi_l(2^j x)$, $\psi_{j,n_j-2}(x) = \psi_l(2^j(L-x))$, $\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - m)$, $m = 0, \dots, 2^j L - 3$, $l = 1, 2$ 。并对 V_j 的剖分结点集合 $\{x_i^j: i = 0, \dots, n_j\}$ 做如下分解:

$$\begin{aligned} x_k^{(-1)} &= k, k = 0(1)L, \\ x_l^{(j)} &= \frac{l+1.5}{2^j}, \end{aligned}$$

$$-1 \leq l \leq n_j - 2, j = 0, \dots, J-1$$

我们想寻找样条插值函数 $P_j f(x) \in V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{J-1}$, $J \geq 1$, 即

* 收稿日期: 2004-03-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60475042); 香港中山大学高等学术研究中心基金会资助项目; 广东省自然科学基金重点资助项目(036608);

作者简介: 钟一兵(1972年生), 男, 博士生; 通讯联系人: 关履泰; E-mail: zmqzyb@sohu.com

$$P_j f(x) = f_{-1}(x) + \sum_{j=0}^{J-1} f_j(x) \tag{1}$$

其中, $f_{-1}(x) = I_{V_0} f(x) \in V_0, f_j(x) =$

$$\sum_{k=-1}^{n_j-2} [f_{j,k}^1 \psi_{1,j,k}(x) + f_{j,k}^2 \psi_{2,j,k}(x)] \in W_j$$

如下的快速算法提供一种继承性的方法去计算小波展式系数的方法。

第一步: 定义

$$f_{-1}(x) = I_{V_0} F^{(-1)} =$$

$$f_{-1,-1} \phi_b(x) + \sum_{v=1}^2 \sum_{k=0}^{L-3} f_{-1,k}^v \phi_{v,0,k}(x) + f_{-1,k} \phi_b(L-x)$$

$f_{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 关于插值点 $\{x_k^{(-1)}\}_{k=0}^{L-1}$ 的 Hermite 插值样条。

第二步: 定义

$$f_0(x) = I_{W_0} (F^{(0)} - (I_{V_0} f)^{(0)}) =$$

$$\sum_{k=-1}^{n_0-2} [f_{0,k}^1 \psi_{1,0,k}(x) + f_{0,k}^2 \psi_{2,0,k}(x)]$$

由小波函数的点值消失特征, 易证 $f_0(x)$ 实际上在 V_0 中插值点 $\{x_k^{(-1)}\}_{k=1}^{L-1}$ 及 W_0 中插值点 $\{x_k^{(0)}\}_{k=0}^{n_0-2}$ 上插值 $f(x)$ 。即 $P_0 f(x) = f_{-1}(x) + f_0(x)$ 。

第三步: 一般地, 对 $0 \leq j \leq J-1$, 定义:

$$f_j(x) = I_{W_j} (F^{(j)} - (P_{j-1} f)^{(j)}) =$$

$$\sum_{k=-1}^{n_j-2} [f_{j,k}^1 \psi_{1,j,k}(x) + f_{j,k}^2 \psi_{2,j,k}(x)]$$

同样能够证明 $f_{-1}(x) + f_0(x) + \dots + f_{j-1}(x)$ 在所有插值点 $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^{L-1}, \dots, \{x_k^{(j-1)}\}_{k=-1}^{n_{j-1}-2}$ 上插值 $f(x)$ 。特别地, 对 $j = J$, 有

$$P_J f(x) = f_{-1}(x) + f_0(x) + \dots + f_{J-1}(x)$$

是 $f(x)$ 的 Hermite 插值函数。

2 五次二重样条小波快速插值算法的奇性检测性质

2.1 小波展式系数

$$\{f_{j,k}^1, f_{j,k}^2\}$$

考虑 $\{\psi_{v,j,k}(x), v = 1, 2\}$ 在小波空间 W_j 中的对偶基 $\{\psi_{1,j,k}^*(x), \psi_{2,j,k}^*(x)\}$, 即对 $j \geq 0, k, l = -1(1)n_j - 2$,

$$\int_I (\psi_{v,j,k}^*)^{(3)}(x) (\psi_{v,j,k})^{(3)}(x) dx = \hat{q}_{v,v} \circ \hat{q}_{v,l},$$

$$\mu, v = 1, 2 \tag{2}$$

令

$$\psi_{j,k}^*(x) = \sum_{l=-1}^{n_j-2} [\beta_{1,j,k,l}^{\mu} \psi_{1,j,l}(x) + \beta_{2,j,k,l}^{\mu} \psi_{2,j,l}(x)]$$

$$\tag{3}$$

记系数矩阵

$$B_j = (\beta_{v,k,l}^{\mu,j})_{2n_j \times 2n_j}, G_j = (\alpha_{v,k,l}^{\mu,j})_{2n_j \times 2n_j}, \mu, v = 1, 2$$

这里

$$\alpha_{v,k,l}^{\mu,j} = \int_I (\psi_{k,j,k})^{(3)}(x) dx,$$

$$-1 \leq k, l \leq n_j - 2$$

由式 (2) 知: $B_j = G_j^{-1}$ 。经计算知 $G_j = 2^{5j} \Gamma$, 其中 Γ 是一个严格对角占优的半带宽为 5 的 Hermite 阵 (即对 Γ 中任一元素 f_{ij} , 若 $|i-j| \geq 5$, 则 $f_{ij} = 0$), 且有:

$$I_{2n_j} \leq \Gamma \leq 800 I_{2n_j}$$

其中 I_{2n_j} 是 $2n_j$ 阶单位矩阵。由矩阵乘法知识可得:

引理 1 设 P 是半带宽为 m_1 的 m 阶矩阵, Q 是半带宽为 m_2 的 m 阶矩阵, 则 $P \circ Q$ 是半带宽为 $m_1 + m_2$ 的矩阵。

分解 $\Gamma = D(I - D^{-1}A)$, 其中 D 是 Γ 的对角元构成的对角阵。由 Γ 的严格对角占优性知:

$$\|D^{-1}A\|_{\infty} \leq \gamma_1 < 1$$

且 $0 < \gamma_1 < 1$, 所以由引理 1, 有如下引理:

引理 2 存在正数 c 和 γ , 使得

$$|\beta_{v,k,l}^{\mu,j}| \leq c 2^{-5j} \exp(-\gamma |k-l|)$$

引理 3^[9] 假设 $g(x)$ 是紧支集函数, 且 n 阶连续可微, 并有 $n+1$ 阶消失矩:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^p g(x) dx = 0 \quad 0 \leq p \leq n$$

又设 $0 \leq \alpha \leq n$, α 是一个不等于整数的实数, $f(x) \in L^2$ 。那么 $f(x)$ 在一个区间 $[a, b]$ 上具有一致 Lipschitz 阶 α 的充要条件是对任何 $k \in \mathbf{Z}$ 和 $j \in \mathbf{Z}$ 当 $2^{-j}k \in (a, b)$ 时有:

$$\left| \int f(x) g(2^j x - k) dx \right| = O(2^{-(\alpha+1)j}), j \rightarrow \infty$$

2.2 奇性检测

以下引理表明了小波系数 $f_{j,k}^{\mu} (j \geq 0)$ 反映了被逼近函数的奇性。

引理 4 设 $0 < \alpha < 1, f(x) \in H_0^3(I)$ 。如对某个 $\delta > 0, f(x)$ 满足:

$$|f^{(3)}(x) - f^{(3)}(x_0)| \leq C |x - x_0|^{\alpha},$$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$$

那么对任何 $k \in \mathbf{Z}, j \in \mathbf{Z}^+$ 当 $2^{-j}k \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$ 时有:

$$|f_{j,k}^{\mu}| = O(2^{-(\alpha+4)j}), j \rightarrow \infty, \mu = 1, 2$$

证明 由于 ψ, ψ_1, ψ_2 都 3 次连续可微,

它们的 3 阶导函数具有 3 阶消失矩, 由引理 2, 引

理3 及 (3) 式, 有:

$$\begin{aligned} |f_{j,k}^\mu| &\leq \left[\sum_{2^{-j}l \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} k_1 2^{-2j} \exp(-\gamma |k-l|) \right] \cdot \\ &\quad O(2^{-(\alpha+4)j}) + k_2 2^{-2j} \exp\left(-\frac{1}{2} \delta 2^j\right) \cdot \\ &\quad \sum_{\nu=1}^2 \sum_{2^{-j}l \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} \left| \int_{\mathbb{R}} f^{(3)}(x) \Phi_\nu^{(3)}(2^j x - l) dx \right| = \\ &\quad O(2^{-(\alpha+4)j}) \end{aligned}$$

设 M_j 是(1)式中函数值和导数值 $F^{(j)}$ 到小波展式系数 $F^{(j)}$ 过渡矩阵.把 M_j 分解成形式 $M_j = I - H$, 可算得 $\|H\|_\infty = \frac{109}{408}$, 令 $M_j^{-1} = (m_{kj})_{2n_j \times 2n_j}$, 由引理 1

$$\begin{aligned} m_{ik} &\leq \|H\|^{\frac{5-i}{2}} \|\cdot\|_\infty \cdot \\ \|I + H + H^2 + H^3 + \cdots\|_\infty &\leq \frac{k}{\alpha^{k-i-1}} \quad (4) \end{aligned}$$

其中, $k = \|M_j\|_\infty = \frac{519}{408}$, $\alpha = (\frac{408}{109})^{\frac{1}{2}} \approx 1.935$.

定理 1 设 $f(x) \in H_0^3(0, L)$, $M = \max\{|f(x)|, |f'(x)|; x \in I\}$ $I_{W_j} f(x)$ 是 $f(x)$ 按(1)式定义在 W_j 中的插值算子, 对 $\forall \epsilon > 0$, 及 $-1 \leq k_1 < k_2 \leq n_j - 2$, $k_1 \leq k \leq k_2$, 如果 $|f(x_k^{(j)})| \leq \epsilon$, $|f'(x_k^{(j)})| \leq \epsilon$, 则定义

$$\begin{aligned} I_{W_j} f(x) = & \sum_{-1 \leq k \leq n_j - 2, k \in \left[k_1 + \left[\frac{l-3}{2} \right], k_2 + \left[\frac{-l-5}{2} \right] \right]} \sum_{\mu=1}^2 f_{j,k}^\mu \psi_{k,j,k}(x) \end{aligned}$$

这里

$$l = l(\epsilon) = \min\left[\frac{n_j - 2}{2}, -\frac{\log \epsilon}{\alpha}\right]$$

则有

$$|I_{W_j} f(x) - I_{W_j} f(x)| \leq C(M) \epsilon$$

这里 $C(M) = \frac{24k}{\alpha - 1}(\alpha + M)$, $k = \frac{517}{408}$, $\alpha = \frac{408}{109}$.

证明 设 M_j 是 (1) 式中函数值和导数值 $F^{(j)}$ 到小波展式系数 $F^{(j)}$ 过渡矩阵, $F^{(j)} = M_j^{-1} F^{(j)}$, 因此

$$\begin{aligned} f_{j,k}^\mu = & \sum_{p=1}^{n_j} [m_{2k+\mu+2, 2p-1} f(x_{p-2}^{(j)}) + m_{2k+\mu+2, 2p} f'(x_{p-2}^{(j)})] \\ & -1 \leq k \leq n_j - 2, \mu = 1, 2 \end{aligned}$$

由引理 4, 当 $k \in \left[k_1 + \left[\frac{l-3}{2} \right], k_2 + \left[\frac{-l-5}{2} \right] \right]$ 时, 有

$$|f_{j,k}^\mu| \leq 4k\epsilon \frac{\alpha}{\alpha - 1} + 4Mk\epsilon \frac{1}{\alpha - 1} = C'\epsilon$$

这里 $C' = \frac{4k}{\alpha - 1}(\alpha + M)$. 最后,

$$\begin{aligned} |I_{W_j} f(x) - I_{W_j} f(x)| &\leq \\ C'\epsilon \sum_k \sum_\mu |\psi_{k,j,k}(x)| &\leq 6C'\epsilon = C\epsilon \end{aligned}$$

定理 2 设 $I_{W_j} f(x)$ 和 $f(x)$ 如定理 1 所定义, 对 $\epsilon \geq 0$, $-1 \leq k_1 < k_2 \leq n_j - 2$, 如果 $|f_{j,k}^\mu| < \epsilon$, $k_1 \leq k \leq k_2$, 那么

$$|f(x_k^{(j)})| \leq 6\epsilon, \quad k_1 + 3 \leq k \leq k_2 - 3$$

证明 由 $I_{W_j} f(x)$ 定义和小波函数的紧支集性质得证。

3 自适应正交配置算法和数值实验

假设 $u = u(x, t)$ 是如下初边值问题的解:

$$\begin{cases} u_t + f_x(u) = u_{xx} + g(u), & x \in [0, L], t \geq 0 \\ u(0, t) = g_0(t), u(L, t) = g_1(t), \\ u(x, 0) = w(x) \end{cases} \quad (5)$$

这里用半离散正交配置格式来求解上述问题. 首先得到自适应网格和一个常微分系统, 然后再用 Runge Kutta 格式求解. 设尺度函数空间 V_j 中的数值解 $u_j(x, t)$ 可以被表示, 则采用三阶显式 Runge-Kutta 格式求解上述常微系统.

3.1 正交配置点的自适应选取

由第 2 节中的结果知, 当 j 较大时, 在一个容许的误差 ϵ 范围内, 可以根据小波系数绝对值的大小自动判定是否需新增配置点, 从而得到配置点的自适应选择算法.

第一步 假设在区间: $(k'_1, l'_1), \dots, (k'_m, l'_m)$, $m = m(j, \epsilon)$ 内有:

$$|\hat{u}_{j,k}| \leq \epsilon, k'_i \leq k \leq l'_i, i = 1, \dots, m$$

第二步 由定理 1, 对 $k'_i \leq k \leq l'_i, i = 1, \dots, m$, 可以把问题 (5) 的数值解在小波空间 W_j 中的插值 $u_j(x)$ 定义成形式:

$$u_j(x) = \sum_{-1 \leq k \leq n_j - 2, k \in k_j} \hat{u}_{j,k} \psi_{k,j,k}(x)$$

这里

$$\begin{aligned} k_j = & \bigcup_{1 \leq i \leq m} \left[k_1 + \left[\frac{l-3}{2} \right], k_2 + \left[\frac{-l-5}{2} \right] \right] \\ l = & l(\epsilon) = \min\left[\frac{n_j - 2}{2}, -\frac{\log \epsilon}{\alpha}\right] \end{aligned}$$

即结点和未知数变成:

$$\begin{aligned} \{x_k^{(j)}, u_j(x_k^{(j)})\}, & k = 1, \dots, L-1, \\ j = & -1; k \in \{0, \dots, n_j - 1\} \setminus k_j, j \geq 0 \end{aligned}$$

第三步 在上述结点两边新增细网格结点.

3.2 数值实验

考虑非线性双曲型方程, Burger 方程:

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0,$$

$$-1 \leq x \leq 2, u(0, t) = 0, u(x, 0) = h(x)$$

这里 $h(x) = -\sin(\pi x) (-1 \leq x \leq 1)$, 在其它地方 $h(x) = 0$. Burger 方程的数值解在时间 $t = \frac{1}{\pi} \approx 0.318$ 时产生激波(shock). 取 $L = 15, J = 8, \epsilon = 10^{-4}$. 我们每迭代一定的次数, 就重新确定配置点的数目和位置. 在 $t = 0.3, 0.318, 0.319$ 时结点数分别为 192, 254, 272. 图 1 给出了时间层 $t = 0.318$ 的数值解的图像. 图 2 给出了这个时间层的小波系数的图像 (分层显示, w_j 中的系数用“j + 系数值”显示).

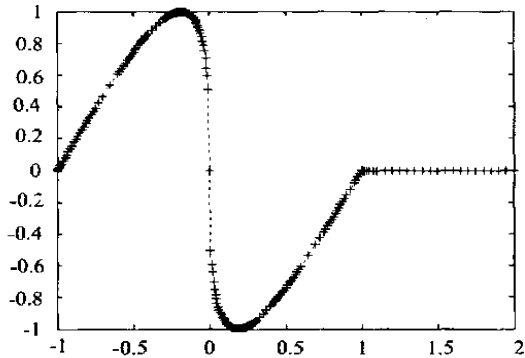


图 1 $t=0.318$ 的逼近解

Fig. 1 Graph of the approximative solution to Burger equation when $t=0.318$

数值求解算法自动地把配置点集中在高频 ($x=0$) 和导数不连续的地方 ($x=-1, x=1$), 而高层的小波空间中只有在这 2 个点附近的小波系数.

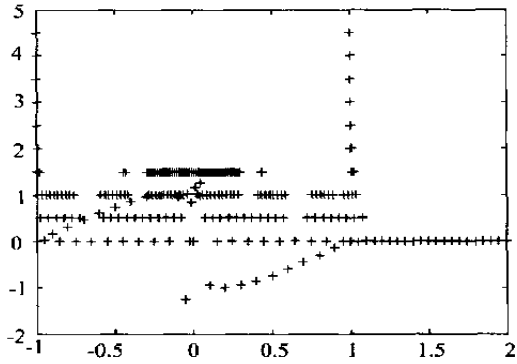


图 2 Burger 方程 $t=0.318$ 的小波系数

Fig. 2 Wavelet coefficients of Burger equation when $t=0.318$

参考文献:

[1] LAYTON A T. Cubic spline collocation method for the shallow water equations on the sphere[J]. J Computational Physics 2002, 179: 578—592.
[2] 黄晟, 曾旋, 王键, 等. 模拟大规模电路的快速频域小波配置方法[J]. 半导体学报, 2002, 49(5): 689—694.
[3] CAI W, WANG J Z. Adaptive multiresolution collocation methods for initial Boundary value problems of nonlinear PDEs [J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33: 937—970.
[4] 舒适, 钟一兵, 喻海元. 多重样条小波与微分方程自适应正交配置算法[J]. 数值计算与计算机应用, 2001(9): 161—171.
[5] CHEN J T, CHANG M H, CHEN K H, et al. Boundary collocation method for acoustic eigenanalysis of the three-dimensional cavities using radial basis function [J]. Computational Mechanics 2002, 29: 392—408.
[6] MEYER Y. Ondelettes sur l'intervalle[J]. Rev Mat Iberoamericana, 1991(7): 115—143.

An Adaptive Orthonormal Collocation Method Based on Quintic Spline wavelets of Two Defects for Differential Equations

ZHONG Yi bing¹, SHU Shi², GUAN Lü tai¹

(1. Department of Scientific Computation and Computer Application, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Department of Mathematics, Xiangtan University, Xiangtan Hunan 411105, China)

Abstract: For fast interpolation with quintic spline two multiwavelets, through constituting dual wavelets, the relation between values of function and coefficients of wavelets expansion is mapped. Consequently the property of singularity detecting of the fast interpolation is obtained. At last, this scheme is used for constructing an adaptive orthonormal collocation method for differential equations.
Key words: spline wavelets; dual wavelets; singularity detecting; adaptive scheme