

一类二阶常微分方程边值问题的三个解^{*}

舒小保¹, 朱全新²

(1. 中山大学数学系, 广东 广州 510275;
2. 华南师范大学数学系, 广东 广州 510631)

摘 要: 利用变分原理和 Morse 理论——不同于通常的不动点理论——研究了一类带参数非自治的二阶常微分方程边值问题的多重解。得出了此类方程存在 3 个解的充分条件。

关键词: 变分原理; Morse 理论; 边值问题; 临界点; 3 个解

中图分类号: O175.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 06-0005-03

1 定义与引理

近年来, 随着常微分方程理论的发展, 如下形式的二阶常微分方程的边值问题引起了许多学者的重视。

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda f(t, u(t)) = 0, 0 \leq t \leq \pi, \lambda > 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

但对方程(1)的研究基本上是利用锥映射不动点定理和相关方法得出方程的正解(见文[1, 2]等)。本文试探利用临界点理论和 Morse 理论来研究此方程。下面介绍有关临界点理论和 Morse 理论以及要用到的 Green 函数的有关知识。(如文[3-8])

定义 1 设 E 为 Banach 空间, $f \in C^1(E, \mathbf{R})$, 如果 $x_0 \in E$ 满足 $f'(x_0) = \theta$, 则 x_0 称为 f 的临界点, $f(x_0)$ 称为 f 的临界值, 不是临界点的点称为 f 的正则点。设 c 是实数, 如果 $f^{-1}(c)$ 中不含临界点, 则 c 称为 f 的正则值。记 $K = \{x \in E \mid f'(x) = \theta\}$, $K_c = \{x \in E \mid f'(x) = \theta, f(x) = c\}$, K 称为 f 的临界集。记 $f_c = \{x \in E \mid f(x) \leq c\}$, 称为 f 的水平集。

定义 2 设 $f \in C^1(E, \mathbf{R})$ 。如果 $\{x_n\} \subset E$, $f(x_n)$ 有界, $f'(x_n) \rightarrow \theta (n \rightarrow \infty)$ 蕴含 $\{x_n\}$ 有收敛子列, 则称 f 满足 Palais Smale 条件, 或简称 P. S. 条件。

定义 3^[3] 设 $f \in C^2(E, \mathbf{R})$, $f'(x_0) = \theta$ 。称 x_0 是非退化的, 如果 $f''(x_0)$ 有有界逆。否则, 称 x_0 是退化的。如果 f 的一切临界点都是非退化的, 则称 f 为一个 Morse 函数。

定义 4^[3] 设 $f \in C^2(E, \mathbf{R})$, $f'(x_0) = \theta$ 。又设 E_- 是 $f''(x_0)$ 的谱分解的极大负定子空间, 称 $\dim E_-$ 为 f 在 x_0 处的 Morse 指数。

引理 1^[3] 设 f 是 Hilbert 空间 E 上的一个 C^2 的实值函数, 满足 P. S. 条件, 并且是下半有界的。又设 f 有一个非退化的、非极小、具有穷 Morse 指数的临界点 x_0 , 则 f 至少有 3 个临界点。

对应方程 (1) 的齐次边值问题

$$\begin{cases} u''(t) = 0, 0 \leq t \leq \pi, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

则边值问题(2)对应的 Green 函数为

$$k(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} t(\pi - s) & 0 \leq t \leq s \leq \pi, \\ \frac{1}{\pi} s(\pi - t) & 0 \leq s \leq t \leq \pi \end{cases}$$

记 $Lu = u''(t)$, Green 函数 $k(t, s)$, 有如下基本性质。

引理 2^[4] Green 函数 $k(t, s)$ 满足

- (1) $k(t, s)$ 在 $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$ 上连续;
- (2) $k(t, s)$ 是对称的, 即 $k(s, t) = k(t, s)$;
- (3) $k(t, s)$ 在 $Q_1 = \{(t, s) \in Q \mid 0 \leq t \leq s \leq \pi\}$

和 $Q_2 = \{(t, s) \in Q \mid 0 \leq s \leq t \leq \pi\}$ 上有连续的偏导数 k'_t, k''_{tt} ;

(4) 对于固定的 $s \in [0, \pi]$, $k(t, s)$ 满足 $Lk(t, s) = 0$ 当 $t \neq s$, $t \in [0, \pi]$ 时 $k(0, s) = k(\pi, s) = 0$ 当 $s \in (0, \pi)$ 时;

(5) $s \neq t$ 时 k'_t 有第一类间断点, 并且

$$k'_t(s+0, s) - k'_t(s-0, s) = -1, s \in (0, \pi).$$

* 收稿日期: 2004-11-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471155); 高等学校博士点专项基金资助项目(20020558092); 广东省自然科学基金资助项目(031608)

作者简介: 舒小保 (1967年生), 男, 博士; E-mail: sxh0221@163.com

记 $(Ku)(t) = \int_0^\pi k(t, s)u(s)ds$, $(fu)(t) = f(t, u(t))$ 从而

$$(Kfu)(t) = \int_0^\pi k(t, s)f(s, u(s))ds$$

于是由引理 2, 有

$$[(Kfu)(t)]' = \int_0^\pi k_t'(t, s)f(s, u(s))ds$$

和

$$[(Kfu)(t)]'' = \int_0^\pi k_{tt}''(t, s)f(s, u(s))ds - f(t, u(t)) = -f(t, u(t)) \quad (3)$$

2 主要结果

定理 1 假设 f 满足下列条件:

(1) $f \in C^1([0, \pi] \times \mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$;

(2) 存在 $\alpha > 0$ 使得

当 $(t, u) \in ([0, \pi] \times \mathbf{R}) \setminus ([0, \pi] \times [-\alpha, \alpha])$

时, 有 $uf(t, u) < 0$;

(3) $f(t, 0) = 0, \forall t \in [0, \pi]$, 同时存在自然数 m , 使得 $m^2 < \lambda f_u'(t, 0) < (m+1)^2$ 则边值问题

(1) 至少有 3 个属于 $C^2[0, 1]$ 的不同解。

证明 只要证明如下泛函

$$I(u) = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} |u'(t)|^2 - \lambda G(t, u(t)) \right] dt, \quad u \in H_0^1(0, \pi) \quad (4)$$

至少有 3 个不同的临界点即可。其中

$$G(t, u(t)) = \int_0^{u(t)} f(t, \omega) d\omega, \quad H_0^1(0, \pi) = \{u$$

$\in C^2[0, \pi], u'(t) \in L^2[0, \pi] \mid u(0) = u(\pi) = 0\}$ 作为通常的 Sobolev 空间是一个 Hilbert 空间, 其内积和范数分别为

$$(u, v) = \int_0^\pi u'(t)v'(t)dt$$

$$\|u\| = \left(\int_0^\pi |u'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

记 $E = H_0^1(0, \pi)$, 而

$$I(u + \varepsilon v) = I(u) +$$

$$\varepsilon \left\{ \int_0^\pi [u'(t)v'(t) - \lambda f(t, u + \theta(t)v)v(t)] dt \right\} +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^\pi |v'(t)|^2 dt \quad \forall u, v \in E, 0 < \theta(t) < 1 \quad (5)$$

可以证明

$$(I'(u), v) = \int_0^\pi [u'(t)v'(t) - \lambda f(t, u)v(t)] dt, \quad \forall u, v \in E \quad (6)$$

另一方面, 由 (3) 可得

$$(u - \lambda Kf(u), v) = \int_0^\pi [u - \lambda Kf(u)]' v'(t) dt =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi u'(t)v'(t)dt - \lambda \int_0^\pi [Kf(u)]' v(t)dt = \\ & \int_0^\pi u'(t)v'(t)dt - \lambda [Kf(u)]' v(t) \Big|_0^\pi + \\ & \lambda \int_0^\pi [Kf(u)]'' v(t)dt = \int_0^\pi u'(t)v'(t)dt - \\ & \lambda \int_0^\pi f(t, u(t))v(t)dt \quad \forall u, v \in E \end{aligned}$$

由于 $f(t, u(t))$ 是连续有界算子, 由 Arzela Ascoli 定理, 容易看出 $K: C_0[0, \pi] \rightarrow C_0[0, \pi]$ 是全连续算子。从而有

$$\begin{aligned} (I'(u), v) &= (u - \lambda Kf(u), v) \\ \Rightarrow I'(u) &= u - \lambda Kf(u) \end{aligned}$$

下面将证明 $I(u)$ 有下界。由于存在 $\alpha > 0$ 使得当 $(t, u) \in ([0, \pi] \times \mathbf{R}) \setminus ([0, \pi] \times [-\alpha, \alpha])$ 时, 有 $uf(t, u) < 0$, 注意到当 $|u(t)| \geq \alpha$ 时, $uf(t, u) \leq 0$ 。因此

$$\begin{aligned} \int_0^\pi G(t, u) dt du &= \int_0^\pi \int_0^u f(t, v) dv dt \leq \\ & \int_0^\pi \int_{-\alpha}^\alpha |f(t, v)| dv dt \end{aligned}$$

把 $\int_0^\pi \int_{-\alpha}^\alpha |f(t, v)| dv dt$ 的值记为 c , 则有

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \lambda c \quad \forall u \in E \quad (7)$$

即 $I(u)$ 有下界。

下面将证明 $P. S.$ 条件成立。设 $\{u_n\} \subset E$, 以及常数 c_1, c_2 满足

$$c_1 \leq I(u_n) \leq c_2 \quad (8)$$

$$I'(u_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty \text{ 时}) \quad (9)$$

首先证明满足条件 (8), (9) 的 $\{u_n\} \subset E$ 按 C 范数有界。一方面由

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &\leq \left(\int_0^t |u'(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_0^\pi |u'(t)| dt \right)^2 \leq \\ & \int_0^\pi dt \int_0^\pi |u'(t)|^2 dt \leq \pi \int_0^\pi |u'(t)|^2 dt \quad (10) \end{aligned}$$

而由 (7), (8) 式得

$$\|u_n\|^2 \leq 2I(u) + \lambda c \leq 2c_2 + \lambda c \quad (11)$$

另一方面由 (10) 式可得

$$\begin{aligned} |u_n(t)|^2 &\leq \pi \int_0^\pi |u_n'(t)|^2 dt = \\ & \pi \|u_n\|^2 \leq \pi (2c_2 + \lambda c) \end{aligned}$$

即 $\|u_n\|_C$ 有界, 所以

$$\|f(u_n)\|_C \leq c_3$$

这里 c_3 是正常数, $f(u_n) = f(t, u_n(t))$ 。因此 $\{Kf(u_n)\}$ 在 $C_0^1[0, \pi]$ 中有收敛子列 $\{Kf(u_{n_j})\}$ 。

注意到 $C_0^1[0, \pi]$ 连续嵌入 $E = H_0^1(0, \pi)$ 因此

$\{Kf(u_{n_j})\}$ 是 E 中的收敛序列, 再由(11)式知 $\{u_{n_j}\}$

在 E 中收敛, 所以泛函 I 满足 $P. S.$ 条件.

由 $f(t, 0) = 0, \forall t \in [0, \pi]$, 知 θ 是 I 的临界点. 再由 $I'(u) = u - \lambda Kf(u) = u - \lambda \int_0^\pi k(t, s)f(s, u(s))ds$ 知

$$I'(\theta) = I - \lambda \int_0^\pi k(t, s)f'_u(s, 0)ds$$

再由 $m^2 < \lambda f'_u(t, 0) < (m+1)^2 \forall t \in [0, \pi]$, 可知 θ 是非极小、非退化的临界点, 其 $Morse$ 指数为 m . 因此根据引理 1, 知 I 至少有 3 个临界点.

定理 2 假设 f 满足下列条件

(1) $f \in C^1([0, \pi] \times \mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$;

(2) 若存在一致有界泛函 $\theta(t, u)$ 使得

$$G(t, u) = \int_0^u f(t, \omega) d\omega \leq \theta(t, u)u^2 + \eta,$$

$$\forall (t, u) \in ([0, \pi] \times \mathbf{R});$$

(3) $f(t, 0) = 0, \forall t \in [0, \pi]$, 同时存在自然数 m , 使得 $m^2 < \lambda f'_u(t, 0) < (m+1)^2$. 记 $M = \sup_{(t, u) \in ([0, \pi] \times \mathbf{R})} \theta(t, u)$, 则当 $\lambda \pi M < \frac{1}{2}$ 时, 边值问题

(1) 至少有 3 个属于 $C^2[0, 1]$ 的不同解.

注意到

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} |u'(t)|^2 - \lambda G(t, u(t)) \right] dt \geq \\ &\int_0^\pi \frac{1}{2} |u'(t)|^2 dt - \lambda \int_0^\pi [\theta(t, u) |u(t)|^2 + \eta] dt \geq \\ &\frac{1}{2} \int_0^\pi |u'(t)|^2 dt - \lambda M \int_0^\pi |u(t)|^2 dt - \lambda \eta \pi \geq \\ &\left(\frac{1}{2} - \lambda M \pi \right) \int_0^\pi |u'(t)|^2 dt - \lambda \eta \pi = \\ &\left(\frac{1}{2} - \lambda M \pi \right) \|u\|^2 - \lambda \eta \pi, \quad \forall u \in E \end{aligned}$$

类似于定理 1 的证明, 容易得出本定理的结果.

例 令 $f(t, u) = (31 + 3\sin t)u - 3u^3$, 讨论

二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda[(31 + 3\sin t)u(t) - 3u^3] = 0, \\ 0 \leq t \leq \pi, \lambda > 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

显然有 $f \in C^1([0, \pi] \times \mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$, 和 $f(t, 0) = 0$ 以及 $5^2 < f'_u(t, 0) < 6^2$ 从而能找到自然数 m 和 λ 使得 $m^2 < \lambda f'_u(t, 0) < (m+1)^2$; 同样注意到

$$uf(t, u) = u[(31 + 3\sin t)u - 3u^3] = u^2[(31 + 3\sin t) - 3u^2]$$

从而 $(t, u) \in ([0, \pi] \times [4, \infty))$, 或 $(t, u) \in ([0, \pi] \times (-\infty, -4])$ 时, 有 $uf(t, u) < 0$, 即定理 1 条件(2)成立, 于是定理 1 所有条件都成立 (λ 需满足 $m^2 < \lambda f'_u(t, 0) < (m+1)^2$), 根据定理 1 知边值问题 (12) 有至少 3 个不同的解.

参考文献:

- [1] 张凤琴, 王济荣. 二阶非线性常微分方程的奇异边值问题[J]. 山西大学学报, 1995, 18: 366—370.
- [2] 马如云. 一类非线性 m -点边值问题正解的存在性[J]. 数学学报, 2003, 46: 785—794.
- [3] 张恭庆. 临界点理论及其应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1986.
- [4] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1995.
- [5] 陆文端. 微分方程中的变分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [6] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [7] 徐远通, 郭志明. 一种几何指标理论在泛函微分方程中的应用[J]. 数学学报, 2001, 44: 1027—1036.
- [8] XU Y T. Subharmonics solutions for convex nonautonomous Hamiltonian systems[J]. Nonl Anal T M A, 1997, 28: 1359—1371.

Three Solutions for a Class of Boundary Value Problems of Second Order Ordinary Differential Equations

SHU Xiao bao¹, ZHU Quan xin²

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: By means of variational structure and Morse theory, which differs from common methods of fixed point theory, triple solutions of boundary value problems for a class of second order nonautonomous ordinary differential equations with a parameter are obtained.

Key words: variational structure; Morse theory; boundary value problem; critical point; three solutions