

# 海-气振子 ENSO 模型的变分迭代解法<sup>\*</sup>

冯 茂 春

( 湖州师范学院理学院, 浙江 湖州, 313000 )

摘 要: 研究了一个厄尔尼诺-南方海涛 ( ENSO ) 的时滞振子的模型  $\frac{dT}{dt} = AT - \epsilon T^3 - BT(t - \delta)$ ,  $t \in (0, +\infty)$ 。

按实际情形, 在相关参数较小的情况下, 将问题合理转为奇摄动问题, 以变分迭代算法求出 ENSO 模型的摄动近似解, 并将结果与精确解作比较, 说明其具有较高的精度。

关键词: 拉氏乘子; 变分迭代算法; ENSO 模型

中图分类号: O175.14 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2005) S1-0152-02

ENSO (厄尔尼诺和南方海涛) 事件是一个复杂的非线性系统, 它的发生极大地影响全球各地区的气候和生态环境等方面的异常变化, 不少时候带来局部或全球性的或大或小的自然灾害, 甚至对经济与人类生活造成严重的影响。因此对它发生的规律及预防的研究, 成为了当前某些国际学术界热衷的对象。已有不少学者对此问题作了许多研究, 并获得了一些成果<sup>[1-4]</sup>。

本文讨论 ENSO 海-气的其中一个模型。在某些条件下, 从数学理论的角度出发, 利用变分迭代法较简捷地得到了相应非线性问题的近似解, 从而可以较直接地得出该问题某些相关物理量的定量方面的特征。

考虑如下一个 ENSO 时滞海-气模型<sup>[5]</sup>:

$$\frac{dT}{dt} = AT - \epsilon T^3 - BT(t - \delta), t \in (0, +\infty) \quad (1)$$

其中,  $T$  为东赤道附近的太平洋中的异常海表温度距平 SST,  $A$ ,  $B$ ,  $\delta$  和  $\epsilon$  为正的模型参数, 其物理含义参见文 [5-7]。

不难看出, 由方程 (1) 可构造相应的泛函:

$$T = T_0(t_0) +$$

$$\int_0^{t_0} \lambda \left( \frac{dT_0}{dt} - AT_0 + \epsilon T_0^3 + BT_0(t - \delta) \right) dt \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  为拉氏乘子,  $t_0$  为  $(0, +\infty)$  内的任一点。在上式中, 若  $\delta$  足够小, 则以一阶近似  $T_0(t) - \delta T_0'(t)$  代替  $T_0(t - \delta)$ , 并对  $T_0$  独立变分, 可知其驻值条件为:

$$\begin{cases} (B\delta - 1)\lambda' + (B - A)\lambda + 3\epsilon\lambda T_0^2 = 0, \\ 1 + (1 - B\delta)\lambda(t_0) \end{cases}$$

当  $\epsilon=0$  时, 拉氏乘子可识别如下:

$$\lambda = \frac{1}{B\delta - 1} \exp\left(\frac{A-B}{B\delta - 1}(t - t_0)\right) \quad (3)$$

将上式代入条件 (2) 即得:

$$T = T_0(t_0) + \frac{1}{B\delta - 1} \int_0^{t_0} \exp\left(\frac{A-B}{B\delta - 1}(t - t_0)\right) \cdot$$

$$\left( \frac{dT_0}{dt} - AT_0 + \epsilon T_0^3 + BT_0(t - \delta) \right) dt$$

由此得一般迭代公式:

$$T_{n+1} = T_n(t_0) + \frac{1}{B\delta - 1} \int_0^{t_0} \exp\left(\frac{A-B}{B\delta - 1}(t - t_0)\right) \cdot$$

$$\left( \frac{dT_n}{dt} - AT_n + \epsilon T_n^3 + BT_n(t - \delta) \right) dt \quad (4)$$

根据问题的实际意义, 选取方程 (1) 解的零次近似为:

$$T_0 = T(0)e^{at} \quad (5)$$

其中,  $T(0)$  为  $T$  在  $t=0$  时的初值,  $\alpha$  为调节常数, 它将在下面的优化过程中被决定。

由 (4)、(5) 可得:

$$T_1(t_0) = T(0)e^{at_0} +$$

$$\frac{1}{B\delta - 1} \int_0^{t_0} \exp\left(\frac{A-B}{B\delta - 1}(t - t_0)\right) \cdot$$

$[(\alpha - A + Be^{-\alpha\delta})T(0)e^{at} + \epsilon(T(0))^3e^{3at}] dt$  (6)  
为避免出现“共振”项, 宜选择调节常数  $\alpha$  为方程

$$\alpha - A + Be^{-\alpha\delta} = 0 \quad (7)$$

的根, 设其为  $\alpha_0$ 。此时 (6) 为

\* 收稿日期: 2005-02-02

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目 (102009)

作者简介: 冯茂春 (1965 年生) 男, 讲师; E-mail: fmc1@hutc.zj.cn

$$T_1(t_0) = T(0)e^{\alpha_0 t_0} + \frac{\epsilon T(0)^3}{3\alpha_0(B\delta - 1) + A - B} \cdot \exp(3\alpha_0 t_0) [1 - \exp(\frac{B-A}{B\delta - 1} - 3\alpha_0) t_0]$$

于是得原方程 (1) 的一阶近似解:

$$T_1(t) = T(0)e^{\alpha_0 t} + \frac{\epsilon T(0)^3}{3\alpha_0(B\delta - 1) + A - B} \cdot \exp(3\alpha_0 t) [1 - \exp(\frac{B-A}{B\delta - 1} - 3\alpha_0) t] \quad (8)$$

其中,  $\alpha_0$  由 (7) 决定。以同样的方法, 可以得到更高阶的近似解。

现将上述结果与精确解作比较, 以说明其精度。考虑对应的非时滞下的 ENSO 海-气模型。将  $B=0$  代入 (1) 得:

$$\frac{dT}{dt} = AT - \epsilon T^3 \quad (9)$$

不难得到方程 (9) 的通解为

$$T(t) = [\frac{\epsilon}{A} + C \exp(-2At)]^{\frac{1}{2}}$$

其中,  $C$  为任意常数。由此知, 在初始条件  $T(0)$  下, (9) 的精确解为

$$T(t) = [\frac{\epsilon}{A} + (\frac{1}{(T(0))^2} - \frac{\epsilon}{A}) \exp(-2At)]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

若  $\epsilon$  足够小, 则由 (10) 可得

$$T(t) = T(0) \exp(At) - \frac{\epsilon(T(0))^3}{2A} \cdot \exp(3At) [-\exp(-2At)] + O(\epsilon^2) \quad (11)$$

再考虑以变分迭代法得到的 ENSO 海-气模型的近似解。在此种情形下,

将  $B=0$  代入 (7), 可得

$$\alpha_0 = A$$

将它代入 (8) 有

$$T_1(t) = T(0) \exp(At) - \frac{\epsilon(T(0))^3}{2A} \cdot \exp(3At) [-\exp(-2At)] \quad (12)$$

比较 (11) 与 (12) 可知, 用变分迭代法得到的近似解与相应情况下问题的精确解两者的一阶近似部分完全一致, 因而 (8) 具有较高的精度。

因此, 由表示式 (8), 可以在 ENSO 时滞模型 (1) 的状态下, 直接分析出东赤道附近的太平洋中的异常海表温度距平 SST 的状态。

参考文献:

[1] 林万涛, 季仲贞, 王斌. 强迫耗散非线性发展方程与平方守恒差分格式[J]. 空气动力学学报, 2001, 19(3): 348—353.

[2] LIN W T, JI Z Z, WANG B. A comparative analysis of computational stability for linear and non-linear evolution equations[J]. Advances in Atmospheric Sciences, 2002, 19(4): 699—704.

[3] MO J Q, ZHU J, WANG H. Asymptotic behavior of the shock solution for a class of nonlinear equations[J]. Progress in Natural Sciences, 2003, 13(10): 768—770.

[4] ADAMS K L, KING J R, TEW R H. Beyond all-orders effects in multiple-scales asymptotic Travelling-wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. J Engineering Math, 2003, 45: 197—226.

[5] WANG C. On the ENSO Mechanisms[J]. Advances in Atmospheric Sciences, 2001, 18(5): 674—691.

[6] 封国林, 董文杰, 贾晓静, 等. 海-气振荡子中的极限环解[J]. 物理学报, 2002, 51(6): 1181—1185.

[7] 戴新刚, 王爱慧, 丑纪范. 混沌系统中可预报性的研究[J]. 物理学报, 2001, 50(4): 606—611.

The Variational Iteration Solving Method of Sea-air Oscillaor for ENSO Model

FENG Mao-chun  
(Science College, Huzhou Teachers' College, Zhejiang Huzhou, 313000, China)

**Abstract:** The delayed oscillator of Ei Niño—Southern Oscillation (ENSO) models  $\frac{dT}{dt} = AT - \epsilon T^3 - BT(t - \delta)$ ,  $t \in (0, +\infty)$  is considered. On the actual situation, while the correlative parameters are small enough, the problem is turned to a singularly perturbed problems. Using the method of variational iteration, the approximation of the solution for ENSO models is obtained, and comparing the result with the exact solution, the better precision of the the result is shown.

**Key words:** Lagrange multiplier; variational iteration method; ENSO models