

自适应双正则参数法在图像恢复中的应用*

杨朝霞¹, 逯峰^{2,3}, 田芊芊⁴

(1. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275;

2. 财政部财政科学研究所, 北京 100040;

3. 广州市财政局信息管理处, 广东 广州 510180;

4. 华南理工大学计算机科学系, 广东 广州 510640)

摘 要: 在利用正则化方法构造变分模型进行图像去噪时, 其正则参数往往选择为恒定值。利用带噪图像中不同类型的像素点在各种方向上的不同特点, 通过构造在 2 个不同方向上选择变动正则参数的双正则参数变分模型, 对带噪图像进行自适应恢复: 即在大量去除噪声的同时, 尽可能地保留边缘信息。同时利用偏微分方程构造出针对数字图像的离散迭代格式, 极大方便了计算。

关键词: 双正则参数; 变分模型; 去噪; 偏微分方程; 离散迭代

中图分类号: TP911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 04-0020-05

1 利用正则化模型进行带噪图像处理的 PDE 法

1.1 噪声模型及正则化方法

对带有噪声的图像来说, 其模型可以写为^[1]:

$$f_0 + \eta = p$$

其中, f_0 为原始的干净图像; η 为图像中加入的噪声, 一般为 Gaussian 白噪声; p 为观测图像, 即带有噪声的图像。

从逼近论的角度来说, 去噪本质上就是找到一个较为光滑的 f 作为 f_0 的近似, 这是一个不适定问题, 可通过正则化方法来求解:

$$\min_f \frac{1}{2} \|f - p\|_{\Omega}^2 + \alpha R(f) \quad (1)$$

其中, R 为正则泛函, α 为正则参数, Ω 为积分区域。在问题(1)中 $\frac{1}{2} \|f - p\|_{\Omega}^2$ 称为拟合项, $R(f)$ 称为正则项, α 在这 2 项中起到重要的平衡作用, 当 α 取较大值时, 问题(1)的解有较高的光滑性, 即去噪的效果较好, 但拟合的效果减弱, 即边缘和细节信息变得模糊; 当 α 取值较小时, 问题(1)的解保持了较好的细节信息, 但去噪的效果减弱。

选择合适的泛函 R , 使得在去噪的同时保持边缘可得到较好的恢复结果。常用的方法包括:

PDE (Partial Differential Equation) 方法^[2]、TV (Total Variation) 方法^[3]和选定特殊光滑函数空间模作为正则项的方法^[4]等。而其中 PDE 方法是一种比较常见的方法。

1.2 利用 PDE 方法进行自适应光滑

利用 PDE 方法进行自适应光滑的典型例子是通过 Perona 和 Malik 所构造的偏微分方程。给定一幅初始图像 $f_0(x, y)$, 通过引入参数 t 而得到一族受到光滑的图像 $f(x, y; t)$ 。当 $t = 0$ 时, $f(x, y; 0) = f_0(x, y)$; 当 $t > 0$ 时, 通过解发展方程可以得到 $f(x, y; t)$, 发展方程如下:

(1) Perona-Malik 方程 (Div 形式):

$$f_t = \text{div}[g(|\nabla f|)\nabla f] \quad (2)$$

其中, $\nabla f = [f_x, f_y]$ 是函数的梯度, 并且: $|\nabla f| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ 。方程(2)中的函数 $g(|\nabla f|)$ 的作用是起到了自适应光滑的作用。如果把(2)式写成 $\zeta - \eta$ 形式, 则可以更好地看出函数 g 的作用。

(2) Perona-Malik 方程 ($\zeta - \eta$ 形式):

令 ζ 表示梯度方向, η 表示与梯度方向垂直的切线方向, 可以把它们写成单位向量的形式

$$\zeta = \frac{[f_x, f_y]}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}, \quad \eta = \frac{[-f_y, f_x]}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$$

通过坐标变换的方法, 可以把(2)式写成如下

* 收稿日期: 2004-07-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371137); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20030558008); 中国博士后科学基金资助项目(2004035043); 中山大学青年教师科研启动基金资助项目(34120-1131047)

作者简介: 杨朝霞 (1975 年生), 女, 博士, 讲师; E-mail: yangzx625@163.com

形式:

$$f_i = g(|\nabla f|) \cdot \left\{ \left[1 + \frac{|\nabla f| g'(|\nabla f|)}{g(|\nabla f|)} \right] f_{\zeta\zeta} + f_{\eta\eta} \right\} \quad (3)$$

在应用中,函数 $g(|\nabla f|)$ 经常选择为

$$g(|\nabla f|) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

(3)式变为如下形式:

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \left(\frac{1}{1 + |\nabla f|^2} f_{\zeta\zeta} + f_{\eta\eta} \right)$$

其中, $f_{\zeta\zeta}$ 和 $f_{\eta\eta}$ 表示在 ζ 方向和 η 方向上的二阶导数。

从这个典型的例子可以看出, Perona-Malik 方法对图像有自适应的光滑效果。从(3)式可以看出,在图像中不同的位置,两个方向上的光滑程度也是不同的:当 $|\nabla f|$ 比较大时,一般可认为是在边缘处,在 η 方向上的光滑量是非常小的,即保持了边缘信息;而当 $|\nabla f|$ 比较小时,即在平坦处,在2个方向上的光滑量都是比较大的,这时较大量地去除噪声。这样就可以在较大程度地去除噪声的同时,能较大程度地保持边缘。

1.3 带噪图像中不同像素点的不同特点

在带有噪声的数字图像中,从保持边缘去噪的角度来看,可以分为3种点:噪声点、边缘点、平坦点。一幅图像可看成是一个二元函数,在每个点上的任何方向上都有方向导数,方向导数可以反映图像灰度在该方向上的变化。在实践中,一般用梯度方向和与梯度方向垂直的切线方向来刻画一个点的性质。在平坦点处,图像灰度的变化平稳,在梯度方向和切线方向上的变化程度小;噪声点一般为孤立点,所以在各个方向上的变化都比较大;边缘点在梯度方向上的变化剧烈,而在切线方向上变化平稳。边缘点是在恢复中要保留的点,所以要尽量保持住这些点的性质。

2 自适应双正则参数的选取

2.1 双正则参数的选取

在以往的利用正则化方法进行带噪图像恢复的工作中,正则参数的选择往往是恒定的,即在图像任何位置都选择统一的正则参数。在文[5, 6]中,选择了随图像梯度而变化的正则参数,在图像灰度变化平稳的部分选择较大的正则参数去尽可能地抑制噪声;在灰度变化剧烈的地方选择较小的正则参数,从而尽可能地保持边缘。

对问题(1)中的正则项选为与梯度有关的格式

$$\min_f J(f) \quad (4)$$

其中,

$$J(f) = \int_{\Omega} |f(x) - p(x)|^2 dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \phi(|\nabla f(x)|) dx$$

对上式求泛函极小,可以得到 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{cases} [f(x) - p(x)] - \lambda^2 \operatorname{div} \left\{ \frac{\phi'(|\nabla f(x)|)}{2|\nabla f(x)|} \nabla f(x) \right\} = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中, Ω 表示图像区域, n 表示与 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 垂直的向量, div 表示散度算子:

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{k=1}^{2 \text{ or } 3} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$$

通过引入变量 t 来得到如下的扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = [p(x) - f(x, t)] + \lambda^2 \operatorname{div} \left\{ \frac{\phi'(|\nabla f(x, t)|)}{2|\nabla f(x, t)|} \nabla f(x, t) \right\} \\ \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ f(x, 0) = p(x) \end{cases} \quad (6)$$

类似地,如果按不同方向来改写(5)式,可得如下表达式:

$$(f - p) - \lambda^2 \left[\frac{\phi'(|\nabla f|)}{2|\nabla f|} f_{\zeta\zeta} + \frac{\phi'(|\nabla f|)}{2} f_{\eta\eta} \right] = 0 \quad (7)$$

从上式可以看出,在图像的每个位置,当 $|\nabla f|$ 比较小时,一般在该处的光滑量较小,保持了边缘的特点。

在对带有噪声的图像恢复中,去噪的同时保持边缘是研究的目的。保持边缘最主要是保持边缘点处梯度方向上的变化,这样才能在恢复图像中保持边缘的特性,而在边缘点上的切线方向上可以保持大量的光滑;噪声点是影响图像质量的最重要的因素,在各个方向上都应有较大程度的光滑;而在平坦的位置点处,由于受到了随机噪声的影响,也需要对它在各个方向上有一定程度的光滑,以去除噪声的影响。

对数字图像来说,主要集中在梯度方向和切线方向,所以本文在正则泛函的选取中,构造2个方向的正则参数,在每个方向上选择二阶方向导数以满足一定的光滑性。同时选择2个变动的正则参数,使之在不同的位置选择不同的正则参数:

(1) 在边缘处的切线方向选择较小的正则参数,可在切线方向选择较大的正则参数以突出边缘的轮廓;

(2) 在噪声点处的2个方向上都选择数值大的正则参数,从而在各个方向上都有较大的光滑量;

(3) 在平坦点处的梯度方向和切线方向选择较

大的正则参数,以保证在这些点处有一定的光滑量而达到去噪的目的。

因此,可以构造出具有双正则参数的变分模型,使之应用更加具有普遍性和更为简单:

$$\begin{aligned} & (f(x, y) - p(x, y)) - \\ & (\lambda_1(x, y)f_{\xi\xi}(x, y) + \\ & \lambda_2(x, y)f_{\eta\eta}(x, y)) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{\xi\xi} &= \frac{f_x^2 f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{yy}}{f_x^2 + f_y^2} \\ f_{\eta\eta} &= \frac{f_x^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{yy}}{f_x^2 + f_y^2} \end{aligned} \quad (9)$$

通过调整(8)式中的 2 个参数 λ_1, λ_2 来控制在不同方向上的光滑量以达到保边缘图像恢复的目的。

设定 2 个阈值 G_T, P_T , 这 2 个阈值是为梯度和切线方向上的变化率设定的,主要是为了选择在某些点上两个参数的取值。对数字图像的每一个像素点来说,可以计算出在该点处的梯度方向和梯度大小 G ,随之可以确定其对应的切线方向,并可计算出在该点处切线方向上的近似变化率 P ^[7]。利用这 2 个量来确定 $\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y)$ 在该点处的取值。

为了算法的简单性,正则参数的取值在 3 个值中选择:① λ_{b_1} 表示取正则参数为大值;② λ_{b_2} 表示取正则参数为较大值;③ λ_s 表示取正则参数为较小值;

如果 $G < G_T$: 这时在该位置上的梯度方向变化较小。根据人类视觉的特点,这些点一般认定为平坦点。在 2 个方向上都选择较大的正则参数,从而较大程度的光滑以抑制噪声的影响。故选择参数

$$\lambda_1(x, y) = \lambda_2(x, y) = \lambda_{b_2}$$

如果 $G > G_T, P > P_T$: 这时在梯度方向和切线方向上都有较大的变化率,这个点可以认为是在图像中比较明显的噪声点(对椒盐噪声最为明显),它们是影响图像质量的一个重要因素,所以要在 2 个方向上都选择较大的正则参数来获得较大量的光滑,以抑制噪声的影响,故选取参数

$$\lambda_1(x, y) = \lambda_2(x, y) = \lambda_{b_1}$$

如果 $G > G_T, P < P_T$: 这时在梯度方向有较大的变化率,而在切线方向的变化不大,可以认为是边缘点。为了保持边缘的特点,需要尽量地保持梯度方向的变化。于是可以在梯度方向上选择较大的参数,而在切线方向上选择较小的参数,以达到在去噪的同时保持这些位置上的边缘特点。故选择参数

$$\lambda_1(x, y) = \lambda_s, \lambda_2(x, y) = \lambda_{b_2}$$

2.2 扩散方程及其离散迭代格式

从式(8)构造出动态偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial f(t; x, y)}{\partial t} = [p(x, y) - f(t; x, y)] + \\ \quad (\lambda_1(x, y)f_{\xi\xi} + \lambda_2(x, y)f_{\eta\eta}) \\ \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ f(0; x, y) = p(x, y) \end{cases} \quad (10)$$

通过对 t 离散的方法可以得到迭代格式:

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x, y) &= f^n(x, y) + \Delta t((p(x, y) - f^n(x, y)) + \\ &\quad (\lambda_1(x, y)f_{\xi\xi}^n + \lambda_2(x, y)f_{\eta\eta}^n)) \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} t_n &= t_0 + n\Delta t, t_0 = 0, f^0(x, y) = p(x, y), \\ f^n(x, y) &= f(t_n; x, y), f^{n+1}(x, y) = f(t_n + \Delta t) \\ \Delta t &\text{为 } t \text{ 的离散步长。当 } t \rightarrow \infty \text{ 时, } f^n \rightarrow f. \text{ 一般只} \end{aligned}$$

需迭代较少的次数就可以得到较好的结果。

对一幅大小为 $M \times N$ 的数字图像,它是由 M 行和 N 列的离散像素点构成的,此时要构造出离散的迭代格式。

计算图像梯度和梯度方向的方法有很多^[8],最简单的方式可以通过差分来近似地代替各阶导数。

从而得到如下分析:

以某个点 P 为例,假定其位置为 $[i, j]$, 其中 $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$ 。即在 i 行 j 列,得如下计算公式:

$$\begin{aligned} f_x|_P &= f(i+h, j) - f(i, j) \\ f_y|_P &= f(i, j+h) - f(i, j) \\ f_{xx}|_P &= \frac{1}{h^2}[f(i+h, j) - 2f(i, j) + f(i-h, j)] \\ f_{yy}|_P &= \frac{1}{h^2}[f(i, j+h) - 2f(i, j) + f(i, j-h)] \\ f_{xy}|_P &= \frac{1}{h^2}[f(i+1, j+1) - f(i+1, j) - \\ &\quad f(i, j+1) + f(i, j)] \end{aligned} \quad (12)$$

将(12)代入(8)式即可计算出在某一点处的 $f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}$ 。在图像的边界处,可以采用延拓的方法进行处理。

利用初始图像 $p(x, y)$ 来确定出在每个离散像素点上每个方向上应取的参数值,可以构造出适合于数字图像处理的离散迭代格式:

$$\begin{aligned} f^{n+1}(i, j) &= f^n(i, j) + \Delta t((p(i, j) - f^n(i, j)) + \\ &\quad (\lambda_1(i, j)f_{\xi\xi}^n + \lambda_2(i, j)f_{\eta\eta}^n)) \end{aligned} \quad (13)$$

通过上式,就可以对带噪数字图像逐点进行运算,从而大大简化了数字图像的计算,使之更加适合计算机编程的实现。

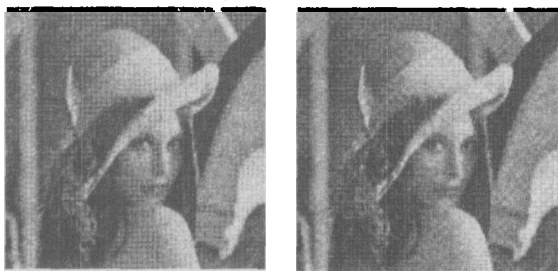
3 实验结果

以 2 幅带有 Gaussian 白噪声的数字图像“Lena.bmp”和“Peppers.bmp”为例(图 1, 2), 其中“Lena”和“Peppers”的噪声方差 δ^2 分别为 25 和 30。通过式(3)的迭代模型来进行迭代计算。

(1) 在“Lena.bmp”中选择 $\Delta t = 0.01$, $G_T = 25$, $P_T = 15$, $\lambda_{b_1} = 0.8$, $\lambda_{b_2} = 0.4$, $\lambda_s = 0.008$, 计算



(a) 带有噪声的 Lena.bmp, $\delta^2=25$ (b) 迭代 3 次的结果



(c) 迭代 13 次的结果 (d) 迭代 33 次的结果

图 1 带有噪声的 Lena.bmp ($\delta^2 = 25$) 和若干迭代结果

Fig.1 Lena.bmp ($\delta^2 = 25$) with noises and results after iterations

出迭代 3 次、13 次和 33 次的结果;

(2) 在“Peppers.bmp”中选择 $\Delta t = 0.02$, $G_T = 20$, $P_T = 18$, $\lambda_{b_1} = 0.9$, $\lambda_{b_2} = 0.5$, $\lambda_s = 0.001$, 计算出迭代 4 次、10 次和 25 次的结果。

从以下实验结果来看, 对噪声影响较大的图像, 只须较少次数的迭代, 就可以取得较好的实验结果, 计算格式简单、稳定。



(a) 带有噪声的Pepper.bmp, $\delta^2=30$ (b) 迭代 4 次的结果



(c) 迭代 10 次的结果 (d) 迭代 25 次的结果

图 2 带有噪声的 Peppers.bmp ($\delta^2 = 30$) 和若干迭代结果

Fig.2 Peppers.bmp ($\delta^2 = 30$) with noises and results after iterations

参考文献:

- [1] 吴立德. 计算机视觉[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1993: 12-20.
- [2] CARMAN R A, ZHONG S F. Adaptive smoothing respecting feature directions[J]. IEEE Trans on Image Processing, 1998, 1(3): 353-358.
- [3] CHEN T F, MULET P. Iterative mehtods for total variation image restoration[R]. UCLA Math Department CAM Report 96-38, 1996, <http://www.math.ucla.edu/applied/cam>.
- [4] CHAMBOLLE A A, RONALD D, BRADLEY L J. Nonlinear wavelet image processing: variational problems, compression and noise removal through wavelet shrinkage[J]. IEEE Trans on Image Prossessing, 1998(7): 319-335.
- [5] 杨朝霞, 逯峰, 李岳生. 变正则参数方法在带噪图像保边缘恢复中的应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(4): 406-409.
- [6] STRONGE D, CHEN T. Relation of regularization parameter and scale in total variation based imagedenosing[R]. UCLA Math. Department CAM Report 96-7, 1996, <http://www.math.ucla.edu/applied/cam>.
- [7] TANG Y Y, YANG L H, LIU J. Wavelets Theory and Its Application to Pattern Recognition[M]. New York: World Scientific Press, 2000: 179-220.
- [8] 逯峰. 图像处理中的变分方法[D]. 广州: 中山大学科学计算与计算机应用系, 2002: 58-66.

(下转第 27 页)

The Centers and Quasi-isochronous Centers at Infinity for a Class of Differential Systems

HUANG Wen-tao¹, LIU Yi-rong², ZHU Fang-lai¹

(1. Department of Computing Science and Mathematics, Guilin University of

Electronic Technology, GuiLin, 541004, Guangxi, China;

2. The Institute of Mathematics, Zhejiang Normal University Jinhua 321004, Zhejiang, China)

Abstract: The definitions of the isochronous center and the quasi-isochronous center at infinity for differential systems are introduced. By means of computations of singular point values and period constants, the problems of center conditions and quasi-isochronous center conditions at infinity for a class of cubic polynomial differential systems are solved. The conditions of infinity to be an isochronous center for a class of rational differential systems are also given.

Key words: infinity; center; isochronous center; quasi-isochronous center

(上接第 23 页)

Variational Method with Adaptive Two Regularization Parameters and Its Application in Noisy Image Restoration

YANG Zhao-xia¹, LU Feng^{2,3}, TIAN Qian-qian⁴

(1. Department of Scientific Computing and Computer Applications, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Sector Information Managment, Bureau of Guangzhou Municipal Finance, Guangzhou 510180, China;

3. Institute of Finance Science Research, Beijing 100040, China;

4. Department of Computer Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In noise removal by the approach of regularization, the regularization parameter is global. A variational model with two adaptive regularization parameters according to the different orientations, which constructed through the characters of different kinds of pixel in a noisy image, is presented for adaptively noisy image restoration. Moreover, a discrete scheme is constructed for a digital image through PDE, which facilitates the computation effectively.

Key words: adaptive regularization parameter; variational model; noise removal; PDE; discrete iteration