

重力场中的气温公式^{*}

苏万春

(广州航海高等专科学校基础部, 广东 广州 510725)

摘 要: 通过对重力场中的温度分布的研究, 导出了重力场中的温度梯度公式, 并利用该公式推出了重力场中的气温公式, 描绘了地球周围低高处大气温度随高度变化的近似曲线。

关键词: 重力场; 温度梯度; 气温公式

中图分类号: O414 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2005) S1-0163-03

几乎所有的热学教材中, 如参考文献 [1—4], 都推证了等温气压公式。由此知道: 处于平衡态的气体, 在重力场的作用下, 等温微粒系统的压强随高度的增加而按指数衰减。实际上, 大气并不等温, 参考文献 [1] 给出了地面以上几十 km 内实测的大气温度随高度的变化图形 (图 1)。本文将研究重力场中大气温度随高度的变化规律, 并导出重力场中的气温近似公式。

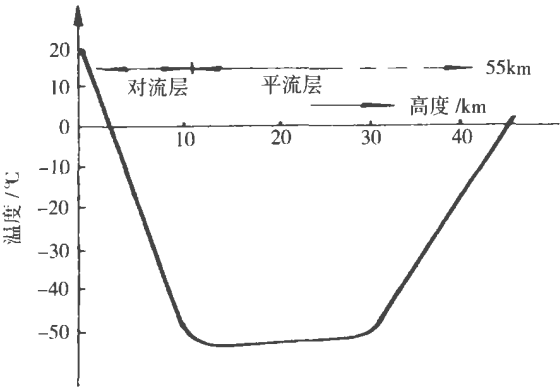


图 1 实测大气温度随高度的分布

Fig 1 The survey of the distribution of the atmospheric temperature varying with the altitude

1 重力场中的温度梯度

为了形象地表示温度空间的变化特征, 可在温度场中画出一系列由场值相同的点所组成的曲面, 称为等温面, 其方程是 $T(x, y, z) = C$ 。当常数 C 取不同的值时, 便得到不同的等温面, 从而构成等温面簇。根据等温面簇能够形象地看出哪些地方温度变化比较剧烈, 哪些地方温度变化比较缓慢。具体地说, 等温面密集处, 温度变化剧烈; 等

温面稀疏处, 温度变化缓慢。在一个温度场中, 不同的等温面之间要产生热流, 从取值较大的等温面流向取值较小的等温面, 且流线要取最短距离, 沿等温面在该点的法向方向看, 达到临近的等温面的距离最短, 温度梯度正反映了这种现象。

温度场是一个时空函数, 即以位置 (x, y, z) 及时间 t 为自变量的四元函数。温度场描述了气体空间温度的分布, 温度场是标量场, 如果给定一个温度场, 可以求出每一点的梯度矢量。假设气体空间有任一点, 其压强 $p = p(x, y, z)$, 由全微分定义得:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

假定该点有一微元气块, 其长宽高分别为 Δx 、 Δy 、 Δz (图 2), 微元气块下边界 z 处气压为 p , 上边界 $z + \Delta z$ 处气压为^[3]

$$p + \Delta p = p + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z$$

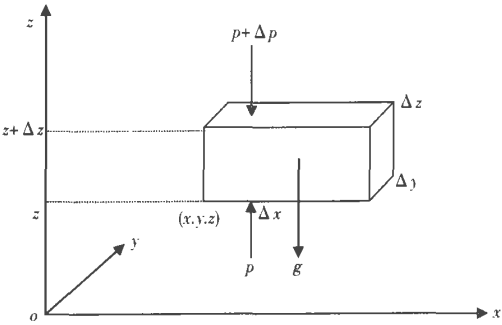


图 2 微元气块

Fig 2 The infinitesimal air lump

^{*} 收稿日期: 2005-02-02
作者简介: 苏万春 (1966 年生) 男, 讲师, E-mail: swcszy@21cn.com
©1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

那么气块在 z 方向所受到的合压力为^[3]

$$F_z = p \cdot \Delta x \cdot \Delta y k - (p + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y k$$

式中: k 为 z 方向的单位矢量, 上式经整理

$$F_z = - \frac{\partial p}{\partial z} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z k = - \frac{\partial p}{\partial z} \Delta V k$$

假设所讨论的气体是理想气体, 将理想气体状态方程 $p = nkT$ 代入上式:

$$F_z = - \frac{\partial (nkT)}{\partial z} \cdot \Delta V k = - k \cdot \Delta V \cdot \frac{\partial (nT)}{\partial z} k \tag{1}$$

同理, 微元气块在 x 、 y 方向上受到合压力分别为:

$$F_x = - k \cdot \Delta V \cdot \frac{\partial (nT)}{\partial x} i \tag{2}$$

$$F_y = - k \cdot \Delta V \cdot \frac{\partial (nT)}{\partial y} j \tag{3}$$

式中 k 为玻尔兹曼常数; n 为分子数密度; i 、 j 分别为 x 方向、 y 方向的单位矢量; T 为热力学温度。由式 (1)、(2)、(3) 得出微元气块受到的总压力:

$$F = F_x + F_y + F_z = - k \cdot \Delta V \cdot (\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k) nT$$

上式中 $(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k) nT$ 是标量函数 nT 的梯度, 表示为 $\nabla (nT)$, 则有:

$$F = - k \cdot \Delta V \cdot \nabla (nT)$$

$$\nabla (nT) = - \frac{F}{k \cdot \Delta V}$$

$$n \cdot \nabla T + T \cdot \nabla n = \frac{F}{k \cdot \Delta V}$$

$$\nabla T = \frac{F}{nk \cdot \Delta V} - \frac{T}{n} \nabla n \tag{4}$$

式 (4) 是重力场中理想气体的温度梯度公式。

2 重力场中的气温公式

设想大气中有一个伸展得很高的气柱, 除受重力以外, 不受风和其它扰动等影响。以体积元 ΔV (总分子数 N , 每个分子质量为 m) 为研究对象^[7] (图 3), 式 (4) 变为

$$\begin{aligned} T &= - \frac{Nm}{nk \cdot \Delta V} g - \frac{T}{n} \nabla n = \\ \frac{NM}{Nk} g - \frac{T}{n} \nabla n &= \frac{m}{k} g - \frac{T}{n} \nabla n \end{aligned} \tag{5}$$

由于仅考虑重力的影响, 那么温度、分子数密度在水平方向上没有变化, 即

$$\frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} i + \frac{\partial n}{\partial y} j = 0$$

式 (5) 变为:

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{mg}{k} - \frac{T}{n} \cdot \frac{dn}{dz} \tag{6}$$

由于 g 随高度 z 的变化而减少, 若地球可视为均匀球体, 由参考文献 [8] 知:

$$g(z) = \frac{GM}{(z+R)^2}$$

式中 G 为万有引力常数; M 为地球的质量; R 为地球的平均半径。如果我们假定分子数密度不变, 则仅由于重力的影响, 式 (6) 变为

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{m}{k} g(z) = - \frac{GmM}{k} \cdot \frac{1}{(Z+R)^2}$$

$$dT = - \frac{GmM}{k} \cdot \frac{1}{(Z+R)^2} dz$$

$$\int_{T_0}^T = - \frac{GmM}{k} \int_0^z \frac{1}{(Z+R)^2} dz$$

上式经整理得:

$$T(z) = T_0 - \frac{GmM}{k} (\frac{1}{R} - \frac{1}{R+Z}) \tag{7}$$

式 (7) 是重力场中的气温近似公式。

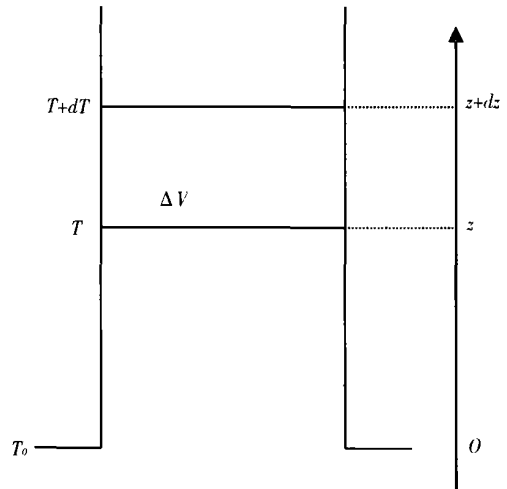


图 3 仅受重力作用的体积元

Fig. 3 The volume element only influenced by gravity

3 地球周围低高处大气温度随高度变化的近似曲线

本文仅考虑 g 随高度的变化, 实际上, 分子数密度 n 也随高度而变, 如果考虑这种变化, 将得到另一种不同的近似。参考文献 [6] 指出: 离地球 1 000 m 以上称为摩擦层, 还必须考虑湍流粘性力、气压梯度和科里奥利力等影响。参考文献 [1] 指出: 离地球 10 000 m 左右的大气为对流层, 10 000 m 以上的大气为平流层。由实测大气温度随高度的分布 (图 1) 知道, 大气在对流层其温度的变化随高度近似成直线递减。

如果地球表面的温度为 $t = 20^\circ\text{C}$, 万有引力常

数 $G=6.67\times 10^{-11}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{kg}^{-1}$ ，大气分子的平均质量 $m=\frac{29\times 10^{-3}}{6.02\times 10^{23}}\text{kg}$ ，地球的质量 $M=5.976\times 10^{24}\text{kg}$ ，玻尔兹曼常数 $k=1.38\times 10^{23}\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ ，地球的平均半径 $R=6.37\times 10^6\text{m}$ 。代入重力场中的气温公式(7)得到：地球周围低高处大气温度随高度变化的近似函数：

$$t(z)=t-\frac{GmM}{k}(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+z})$$
$$t(z)=20-\frac{6.6\times 10^{-11}\times 29\times 10^{-3}\times 5.96\times 10^{24}}{6.02\times 10^{23}\times 1.38\times 10^{-23}}\cdot(\frac{1}{6.37\times 10^6}-\frac{1}{6.37\times 10^6+z})$$

如果用计算机进行画图，其曲线如图（图 4）。

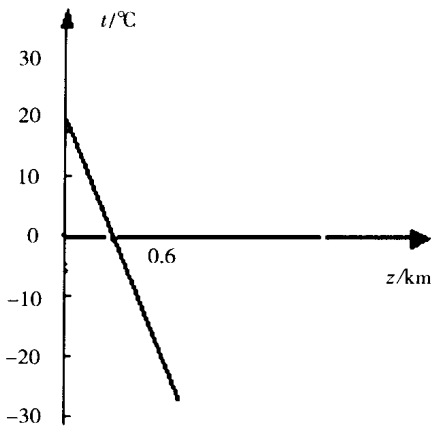


图 4 地球周围低高处大气温度随高度变化的近似曲线
Fig. 4 An approximate curve demonstrating the atmospheric temperature above the earth which varies with the altitude

4 结 语

本文推出的重力场中的气温公式，是对地球周围低高处大气温度随高度变化的近似描述。随着高度的不断增加，大气除受重力以外，还将受到很多因素的影响，如湍流粘性力、气压梯度和科里奥利力等。但是，通过将图 4 与图 1 的对比，地球周围低高处大气温度随高度变化的趋势与实际比较接近。本文希望通过抛砖引玉，在综合考虑各种因素的影响下，得到一种更为完善的气温公式。

参考文献:

[1] 赵凯华, 罗蔚茵. 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
[2] 王楚, 李椿, 徐安士. 热学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
[3] 秦允豪. 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
[4] 刘玉鑫. 热学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.
[5] 苏万春. 重力场中的压强场[J]. 广州航海高等专科学校学报, 2001(2): 72.
[6] 王衍明. 大气物理学[M]. 青岛: 青岛海洋大学出版社, 1993.
[7] 许崇桂. 热学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1997.
[8] 赵凯华, 罗蔚茵. 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.

The Formula of the Atmospheric Temperature in Gravity Field

SU Wan-chun

(Basic Courses Department, Guangzhou Maritime College, Guangzhou 510725, China)

Abstract: Based on the study of the distribution of the temperature in the gravity field, a gradient fomula of it is introduced; and with the help of this fomula, the one of the atmospheric temperature is thus worked out, which can be shown by an approximate curve demonstrating the atmospheric temperature varying with the altitude above the earth.
Key words: gravity field; temperature gradient; formula of the atmospheric temperature