

非齐型空间上奇异积分算子加权估计^{*}

韩彦昌

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 让 μ 是 $\mathbf{R}^d$ 上非双倍的 Radon 测度, μ 仅满足增长性条件, 即存在 $c_0 > 0$, 对所有 $x \in \mathbf{R}^d$, $r > 0$, $\mu(B(x, r)) \leq c_0 r^n$ 成立, 其中 $0 < n \leq d$ 。学习在非双倍测度的条件下, 具有 Dini 核的极大奇异积分算子是从 $L^1(\omega)$ 到 $L^{1,\infty}(\omega)$ 和 $L^p(\omega)$ 有界的, 其中 $1 < p < \infty$, $(\omega) \in A_p$ 。

关键词: 极大奇异积分算子; Dini 核; 非双倍测度; A_p 权

中图分类号: O174.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 03-0001-04

1 定义与定理

调和分析里经典的 Calderón Zygmund 算子理论的一个基本的假设是测度 μ 满足双倍条件。 $\mathbf{R}^d$ 上的测度 μ 是双倍的是指存在常数 $c > 0$, 对 $x \in \text{supp}(\mu)$, $r > 0$, 使得 $\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$ 成立。David^[1] 指出奇异积分算子是 $L^2(\mu)$ 有界的一个必要条件是测度 μ 满足增长条件, 即存在 $c_0 > 0$, 对所有 $x \in \mathbf{R}^d$, $r > 0$, $\mu(B(x, r)) \leq c_0 r^n$, 其中 $0 < n \leq d$ 成立。在欧氏空间赋予只满足增长性条件的 Radon 测度被称为非齐型空间。最近在非齐型空间上, 奇异积分算子理论获得了许多优秀的成果 (见文 [2—5])。

定义 1 设 $k(x, y)$ 是定义于 $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \setminus D$ 的实值函数, 其中 $D = \{(x, x) : x \in \mathbf{R}^d\}$, 核 $k(x, y)$ 称为 (n 维) Dini 核 (DK) 是指:

$$|k(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n} \quad (1)$$

$$|k(x, y) - k(x', y)| + |k(y, x) - k(y, x')| \leq A\omega\left(\frac{|x - x'|}{|x - y|}\right) \frac{1}{|x - y|^n} \quad (2)$$

当 $|x - x'| \leq \frac{|x - y|}{2}$ 时, 其中 $\omega(s)$ 满足

Dini 条件, 即 $\omega(x)$ 是非减函数, $\int_0^1 \omega(s) \frac{ds}{s} < \infty$ 。

定义 2 称 T 是 Dini 型奇异积分算子是指存在 $k \in \text{DK}$, 使得对任意紧支集函数 $f \in L^2(\mu)$, $x \notin \text{spt}(\mu)$, 有

$$Tf(x) = \int k(x, y)f(y)d\mu(y) \quad (3)$$

上面的积分当 $x \notin \text{spt}(\mu)$ 时, 可以不收敛。正是这个原因需要介绍截断算子 T_ϵ , $\epsilon > 0$ 和极大奇异积分算子:

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} k(x, y)f(y)d\mu(y)$$

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon} |T_\epsilon f(x)|$$

一个非负的, 局部可积函数称为权。要考虑满足下列条件的权。

定义 3 让 $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ 。称权 ω 满足 $A_p(\mu)$ 条件是指: 如果存在常数 K , 使得对任意的方体 Q 有

$$\left[\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega d\mu \right] \left[\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega^{1-p'} d\mu \right]^{p-1} \leq K \quad (4)$$

也称权 ω 满足 $A_1(\mu)$ 条件是指: 如果存在常数 K , 使得对任意的方体 Q 有

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \omega d\mu \leq K \text{essinf}_{x \in Q} \omega(x) \quad (5)$$

也定义 $A_\infty(\mu) = \bigcup_{p>1} A_p(\mu)$ 。

Ombitg 等^[3] 证明了 Calderón Zygmund 算子和极大奇异积分算子是 $L^p(\omega)$ 有界的, 其中 $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$ 。本文的主要结果是下面的定理。

定理 T 是 $L^2(\mu)$ 有界的 Dini 型奇异积分算子, 如果 $\omega \in A_1(\mu)$, 则对所有的 $f \in L^1(\omega)$ 有

$$\|T^* f\|_{L^{1,\infty}(\omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\omega)} \quad (6)$$

如果 $1 < p < \infty$ 和 $\omega \in A_p(\mu)$, 则对所有的 $f \in L^p(\omega)$ 有

$$\|T^* f\|_{L^p(\omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\omega)} \quad (7)$$

根据定理容易有下面的推论。

* 收稿日期: 2004-06-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10171111); 中山大学高等学术研究中心基金项目

作者简介: 韩彦昌 (1973 年生), 男, 博士研究生; E-mail: hanyc291@163.com

推论 T 是 $L^2(\mu)$ 有界的 Dini 型奇异积分算子, 令如果 $\tilde{\omega} \in A_1(\mu)$, 则对所有的 $f \in L^1(\tilde{\omega})$ 有

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(\tilde{\omega})} \leq C \|f\|_{L^1(\tilde{\omega})}$$

如果 $1 < p < \infty$ 和 $\tilde{\omega} \in A_p(\mu)$, 则对所有的 $f \in L^p(\tilde{\omega})$ 有

$$\|Tf\|_{L^p(\tilde{\omega})} \leq C \|f\|_{L^p(\tilde{\omega})}.$$

2 定理的证明

引理 T 是 $L^2(\mu)$ 有界的 Dini 型奇异积分算子, 令 $\tilde{\omega} \in A_\infty(\mu)$, 对任意的 $\beta > 0$, 存在正常数 ρ ,

τ, γ , 使得 $\tau < \frac{1}{(1+\beta)^p}$, 则对所有的 $f \in \bigcup_{1 \leq p < \infty} L^p(\mu)$ 有

$$\tilde{\omega}(\{T^*f > (1+\beta)\lambda\} \cap \{M_\nu f \leq \gamma\lambda\}) \leq \tau \tilde{\omega}(\{T^*f > \lambda\}) \quad (8)$$

证明 首先考虑特殊情形即 $\omega \equiv 1$. 由于集合 $\Omega = \{x; T^*f(x) > \lambda\}$ 是开集, 所以它能分解成 Whitney 方体的两两不交并 $\Omega = \bigcup Q$. 断言:

$$\mu(Q_j \cap \{T^*f > (1+\beta)\lambda\} \cap \{M_\nu f \leq \gamma\lambda\}) \leq a\mu(4Q_j) \quad (9)$$

其中, aQ 定义为与 Q 有同中心边长是 $a l(Q) = ar$ 的方体. 进而 $4Q_j$ 是具有几乎不交常数 4^n 的方体且 $4Q_j \subset \Omega$. 根据 Whitney 分解, 还知道

$$2\sqrt{nl}(Q_j) \leq \text{dist}(Q_j, \Omega^c) \leq 4\sqrt{nl}(Q_j)$$

事实上, 对于任意的 Whitney 方体 Q , 都存在 $b_j \in Q$ 使得 $M_\nu f(b_j) \leq \gamma\lambda$, 否则 (9) 式的左边是空集合. 令 $z \in \Omega^c = \{x; T^*f(x) \leq \lambda\}$, 使得 $\text{dist}(z, Q) = \text{dist}(Q_j, \Omega^c)$. 定义

$$Q_j^* = Q_j(b_j, \frac{5}{2}r_j)$$

$$Q_j^{**} = B_j(z, 15\sqrt{nr_j})$$

$$Q_j^{***} = B_j(b_j, 20\sqrt{nr_j})$$

其中 $Q_j(x, r_j)$ 是中心在 x 边长为 r_j 的方体, $B(x, r_j)$ 是中心在 x 半径为 r_j 的球. 进而有

$$Q \subset Q_j^* \subset 4Q_j \subset Q_j^{**} \subset Q_j^{***}$$

定义

$$f_1 = f\chi_{Q_j^{**}}, f_2 = f - f_1$$

由于 $x \in Q_j, y \in (Q_j^*)^c$ 时,

$$|x - y| > \frac{r_j}{4}$$

所以对 $x \in Q_j$ 有

$$|T_\epsilon f_1(x)| \leq |T_\epsilon(f\chi_{Q_j^*})(x)| +$$

$$\int_{|x-y|>\epsilon, y \in (Q_j^*)^c, y \in Q_j^{*KG-2}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} d\mu(y) \leq$$

$$T^*(f\chi_{Q_j^*})(x) + \frac{C}{r_j^n} \int_{Q_j^{***}} |f(y)| d\mu(y) \leq$$

$$T^*(f\chi_{Q_j^*})(x) + C\gamma\lambda$$

进一步有

$$|T_\epsilon f(x)| \leq |T_\epsilon f_2(x)| + T^*(f\chi_{Q_j^*})(x) + C\gamma\lambda$$

对 $x \in Q_j$, 要获得下面的估计

$$|T_\epsilon f_2(x) - T_\epsilon f_2(z)| \leq CM_\nu f(b_j) \quad (10)$$

事实上, 对 $\epsilon > 0$, 就有

$$|T_\epsilon f_2(x) - T_\epsilon f_2(z)| \leq$$

$$\begin{aligned} & \int_{|z-y|>\epsilon} |k(x, y) - k(z, y)| |f_2(y)| d\mu(y) + \\ & \left| \int_{|z-y|>\epsilon, |x-y|\leq\epsilon} k(z, y) f_2(y) d\mu(y) \right| + \\ & \left| \int_{|z-y|\leq\epsilon, |x-y|>\epsilon} k(x, y) f_2(y) d\mu(y) \right| = \\ & L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned}$$

如果 $x \in Q_j, z \in \Omega^c, y \in (Q_j^{**})^c$, 则

$$|x - z| \leq 5\sqrt{nr_j},$$

$$|y - z|, |x - y| \geq 10\sqrt{nr_j}$$

所以

$$\begin{aligned} L_1 & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}15\sqrt{nr_j} \geq |y-z| \geq 2^k15\sqrt{nr_j}} \\ & |k(x, y) - k(z, y)| |f(y)| d\mu(y) \leq \\ & c \sum_{k=0}^{\infty} \omega(2^{-k-1}) M_\nu f(b_j) \leq c M_\nu f(b_j) \end{aligned}$$

对 $y \notin Q_j^{**}$, 有

$$|x - z| \leq 5\sqrt{nr_j} \leq \frac{|y - z|}{3}$$

和

$$\frac{2}{3}|y - z| \leq |y - z| - |x - z| \leq$$

$$|y - x| \leq |y - z| + |x - z| \leq \frac{4}{3}|y - z|,$$

$$|y - b_j| \geq |y - z| - |b_j - z| \geq 10\sqrt{nr_j},$$

$$\frac{11}{10}|y - x| \geq |y - x| + \sqrt{nr_j} \geq$$

$$|y - x| + |x - b_j| \geq |y - b_j| \geq$$

$$|y - x| - |x - b_j| \geq$$

$$|y - x| - \sqrt{nr_j} \geq \frac{9}{10}|y - x|$$

利用核的大小条件对第 2 项, 获得

$$L_2 \leq$$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{11\epsilon}{10} \geq |b_j - y|, |z - y| > \epsilon} \frac{c}{|y - z|^n} |f(y)| d\mu(y) \leq \\ & c M_\nu f(b_j) \end{aligned}$$

类似地对于 L_3 , 有

$$L_3 \leq \int_{\frac{44\epsilon}{30} \geq |b_j^{-1}y|, |x-y| > \epsilon} \frac{c}{|y-x|^n} |f(y)| d\mu(y) \leq dM_\mu f(b_j)$$

所以估计式 (10) 获证。

也容易获得 $T_\epsilon f_2(z) \leq T^* f(z) \leq \lambda$ 。所以对 $x \in Q_j$, 有 $T^* f(x) \leq T^*(f\chi_{Q_j^*})(x) + (1 + c\gamma)\lambda$ 。

现在选择 γ 使得 $2c\gamma \leq \beta$, 由于 T^* 是映 $L^1(\mu)$ 到 $L^{1,\infty}(\mu)$, 就有下面的估计

$$\begin{aligned} \mu(Q_j \cap \{T^* f > (1 + \beta)\lambda\} \cap \{M_\mu f \leq \gamma\lambda\}) &\leq \\ \mu\left(Q_j \cap \left\{T^*(f\chi_{Q_j^*}) > \frac{\beta}{2}\lambda\right\}\right) &\leq \\ \frac{C}{\beta\lambda} \int |f(y)\chi_{Q_j^*}(y)| d\mu(y) &\leq \\ \frac{C\gamma}{\beta} \mu(4Q_j) &\leq \alpha\mu(4Q_j) \end{aligned}$$

所以断言 (9) 式获证。(9) 式两边对 j 求和, 有

$$\mu(\{T^* f > (1 + \beta)\lambda\} \cap \{M_\mu f \leq \gamma\lambda\}) \leq \alpha 4^n \mu(\Omega)$$

选择 α 使得 $\alpha 4^n = \tau < \frac{1}{2(1 + \beta)^p}$, 获得 (8)

式的特殊情形 $\tilde{\omega} \equiv 1$ 。

对于一般的 $\tilde{\omega}$, 对 (9) 式应用文 [3] 中引理 2.3, 有

$$\tilde{\omega}\left(Q_j \cap \{T^* f > (1 + \beta)\lambda\} \cap \{M_\mu f \leq \gamma\lambda\}\right) \leq c\alpha^p \tilde{\omega}(4Q_j)$$

对 j 求和, 获得

$$\tilde{\omega}(Q_j \cap \{T^* f > (1 + \beta)\lambda\} \cap \{M_\mu f \leq \gamma\lambda\}) \leq c\alpha^p 4^n \tilde{\omega}(\Omega)$$

选择 α 使得 $\tau = c4^n \alpha^p < \frac{1}{2(1 + \beta)^p}$, 就获得了定理的证明。

显然当 $\delta > 0$ 时, (8) 式对算子 $T_\delta^* f(x) = \sup_{\mathbb{R}^d} |T_\epsilon f(x)|$ 也成立。

定理证明 这里断言: 对紧支集有界函数和 $\tilde{\omega} \in A_p(\mu)$, 下式成立。

$$\|T_\delta^* f\|_{L^p(\tilde{\omega})} < \infty \quad (11)$$

对紧支集有界函数和 $\tilde{\omega} \in A_1(\mu)$, 成立下式。

$$\|T_\delta^* f\|_{L^{1,\infty}(\tilde{\omega})} < \infty \quad (12)$$

事实上, 让 $\text{supp}(f) \subset B = B(0, N)$, 写

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{10B} + \int_{\mathbf{R}^d \setminus 10B} \right\} |T_\delta^* f(x)|^p \tilde{\omega}(x) d\mu(x) &= A_1 + A_2 \\ \tilde{\omega}\{x \in \mathbf{R}^d : |T_\delta^* f| > \lambda\} &= \\ \tilde{\omega}\{x \in 10B : |T_\delta^* f| > \lambda\} + \\ \tilde{\omega}\{x \in \mathbf{R}^d \setminus 10B : |T_\delta^* f| > \lambda\} &= B_1 + B_2 \end{aligned}$$

使用 Hölder 不等式和 T^* 是强 (p, p) 有界的, 有

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \left\{ \int_{10B} |T_\delta^* f(x)|^{p'} d\mu(x) \right\}^{1/p'} \cdot \\ &\left\{ \int_{10B} \tilde{\omega}^r(x) d\mu(x) \right\}^{1/r} \leq \\ C \|f\|_{p'}^p &\left\{ \int_{10B} \tilde{\omega}^r(x) d\mu(x) \right\}^{1/r} \end{aligned}$$

其中 $r = 1 + \frac{1}{\delta}$ 是在文 [3] 里引理 2.3 中反向 Hölder 不等式成立的常数, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ 。所以 $A_1 < \infty$ 。类似也有 $B_1 < \infty$ 。

如果 f 是非零函数, 那么有

$$\begin{aligned} A_2 &\leq C \int_{\mathbf{R}^d \setminus 10B} \frac{1}{|x|^{np}} \cdot \\ &\left\{ \int_{|y| \leq N} |f(y)| d\mu(y) \right\}^p \tilde{\omega}(x) d\mu(x) \leq \\ C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}(10B) \setminus 2^k(10B)} \frac{1}{|1+x|^p} \cdot \\ &\left\{ \int_{|y| \leq N} |f(y)| d\mu(y) \right\}^p \tilde{\omega}(x) d\mu(x) \leq \\ C \int M_\mu f(x)^p \tilde{\omega}(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

类似地也有

$$B_2 \leq C\lambda\tilde{\omega}\{x \in \mathbf{R}^d \setminus 10B : M_\mu f(x) > \lambda\}$$

根据文 [3] 中引理 3.1, 知道断言 (11), (12) 为真。

当 $1 < p < \infty$ 和 $\tilde{\omega} \in A_p(\mu)$, $f \in L^p(\tilde{\omega})$ 时, 应用引理, 有

$$\begin{aligned} \|T_\delta^* f\|_{L^p(\tilde{\omega})}^p &\leq \\ (1 + \beta)^p \tau \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \tilde{\omega}(\{T_\delta^* f > \lambda\}) d\lambda + \\ C \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \tilde{\omega}(\{M_\mu f \leq \gamma\lambda\}) d\lambda &\leq \\ \frac{1}{2} \|T_\delta^* f\|_{L^p(\tilde{\omega})}^p + C \|M_\mu f\|_{L^p(\tilde{\omega})}^p \end{aligned}$$

当 $f \in L^1(\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega} \in A_1(\mu)$ 时, 有

$$\begin{aligned} (1 + \beta)\lambda\tilde{\omega}(\{T_\delta^* f > (1 + \beta)\lambda\}) &\leq \\ (1 + \beta)\lambda\tilde{\omega}(\{T_\delta^* f > (1 + \beta)\lambda\} \cap \{M_\mu f \leq \gamma\lambda\}) + \\ (1 + \beta)\lambda\tilde{\omega}(\{M_\mu f \leq \gamma\lambda\}) &\leq \\ 3(1 + \beta)\lambda\tau\tilde{\omega}(\{T_\delta^* f > \lambda\}) + \\ (1 + \beta)\lambda\tilde{\omega}(\{M_\mu f \leq \gamma\lambda\}) \end{aligned}$$

利用 (11) 式, 知道

$$\|T_\delta^* f\|_{L^p(\tilde{\omega})} \leq C \|f\|_{L^p(\tilde{\omega})}$$

对紧支集有界函数和 $\tilde{\omega} \in A_p(\mu)$ 成立。利用 (12) 式, 也有

$$\|T_\delta^* f\|_{L^{1,\infty}(\tilde{\omega})} \leq C \|f\|_{L^1(\tilde{\omega})}$$

对紧支集有界函数和 $\tilde{\omega} \in A_1(\mu)$ 成立。

为了完成定理的证明, 介绍辅助的极大算子:

令 $0 < \delta < L < \infty$

$$T_{\delta L}^* f(x) = \sup_{L \geq |y| \geq \delta} |T_y f(x)|$$

由于 $T_{\delta L}^* f \leq T_{\delta}^* f$, 知道对紧支集有界函数下面的两式也成立.

$$\|T_{\delta L}^* f\|_{L^p(\tilde{\omega})} \leq C \|f\|_{L^p(\tilde{\omega})} \quad (13)$$

$$\|T_{\delta L}^* f\|_{L^{1,\infty}(\tilde{\omega})} \leq C \|f\|_{L^1(\tilde{\omega})} \quad (14)$$

其中 $1 < p < \infty$ 和 C 是不依赖于 f , δ 和 L .

对 $\tilde{\omega} \in A_p(\mu)$ 和 $f \in L^p(\tilde{\omega})$, 定义截断函数

$$f_N(x) = f(x) \chi_{|f| \leq N}(x) \chi_{|x| \leq N}(x)$$

则利用 Lebesgue 控制收敛定理, f_N 是有界紧支集依 $L^p(\omega)$ 范数收敛于 f . 对 δ, L 固定, 应用 Minkowski 不等式, 有

$$\begin{aligned} & \int |T_{\delta L}^* f_N(x) - T_{\delta L}^* f(x)|^p \tilde{\omega}(x) d\mu(x) \leq \\ & \int |T_{\delta L}^* (f - f_N)(x)|^p \tilde{\omega}(x) d\mu(x) \leq \\ & C \delta^{-np} \left\{ \int_{\delta \leq |x-y| \leq L} \|f - f_N\|_{L^p(\tilde{\omega})}^p d\mu(y) \right\}^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

当 $N \rightarrow \infty$, 即 $T_{\delta L}^* f_N \rightarrow T_{\delta L}^* f$ 依 $L^p(\tilde{\omega})$ 范数, 当 $N \rightarrow \infty$ 时. 所以结论 (13) 和 (14) 对 $f \in L^p(\tilde{\omega})$ 为真. 进

一步由于 Fatou 引理和 $\lim_{\delta \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} T_{\delta L}^* f(x) = T^* f(x)$ 知道结果 (6) 和 (7) 对 $f \in L^p(\tilde{\omega})$ 和 $x \in \mathbf{R}^d$ 是成立的.

致谢: 衷心感谢导师邓东皋教授的悉心指导.

参考文献:

- [1] DAVID G. Wavelets and singular integrals on curves and surfaces[M]. Lect Notes in Math, 1465, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [2] TOLSA X. Cotlar's inequality without the doubling condition and existences of principal values for the Cauchy integral of measures[J]. J. Reine Angew Math, 1998, 502: 199—235.
- [3] OROBITG J, PÉREZ C. A_p weights for non doubling measures in $\mathbf{R}^n$ and applications[J]. Trans Amer Math Soc, 2002, 354: 2013—2033.
- [4] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. Tb-theorems on nonhomogeneous spaces[J]. Duke Math J, 2002, 113: 259—312.
- [5] TOLSA X. Littlewood Paley theory and the $T(1)$ theorem with non-doubling measures[J]. Adv in Math, 2001, 164: 57—116.

Weighted Estimates for Singular Integral Operators on Non homogeneous Spaces

HAN Yan chang

(Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Let μ be a Radon measure on $\mathbf{R}^d$ which may be non doubling, the only condition that μ must satisfy is growth condition, namely there is a constant $c_0 > 0$, such that $\mu(B(x, r)) \leq c_0 r^n$, for all $x \in \mathbf{R}^d$, $r > 0$, and for some fixed $0 < n \leq d$. To study that maximal singular integral operators with Dini kernels are from $L^1(\tilde{\omega})$ to $L^{1,\infty}(\tilde{\omega})$ and $L^p(\tilde{\omega})$ bounded for $1 < p < \infty$ if $\tilde{\omega} \in A_p$.

Key words: maximal singular integrals operator; Dini kernel; non doubling measure; A_p weights