

# 一类三次多项式微分系统的代数分类及其应用

刘爱莲<sup>1</sup>, 李学敏<sup>2</sup>, 朱思铭<sup>1</sup>

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;  
2. 山东师范大学数学系, 山东 济南 250014)

**摘要:** 利用 Libre 的代数不变式理论, 首先由二元二次和二元四次多项式的分类结果, 对一次和二次齐次多项式微分系统进行代数分类, 同时补充了已有结果中出现的漏洞; 其次, 由称共变张量空间的性质, 对缺二次项的三次微分系统在保证轨线走向不变的前提下进行代数分类, 使分类后同类系统的示性多项式有相同零点; 最后通过讨论一类简单系统的有界性说明了分类的方便之处。

**关键词:** 代数不变式理论; 代数分类; 有界性; 示性多项式

**中图分类号:** O175.12; O175.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 04-0004-05

## 1 代数不变式理论

设  $K$  为复数域  $\mathbf{C}$  或实数域  $\mathbf{R}$ ,  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  是含  $n$  个变量的多项式所形成的环, 那么  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  中次数为  $r$  的齐次多项式所形成空间同构于  $n$  维向量场  $E$  上的  $r$  次对称共变张量所形成的空间  $S_r(E)$ 。因此, 任意  $n$  元  $r$  次齐次多项式都可看作  $r$  次对称共变张量。

设  $\Sigma$  是  $E$  到  $E$  的非退化线性变换所成的集合, 则  $\Sigma$  是线性变换群  $L(E, E)$  的子群。在  $S_r(E)$  上定义关系  $R: \forall f, g \in S_r(E), fRg, \text{ iff } \exists \sigma \in \Sigma, \text{ 使 } g(x) = f(\sigma(x)), x \in E$ 。易证  $R$  为  $S_r(E)$  上的等价关系。此时称  $R$  是由  $\sigma$  诱导出的等价关系。且由此关系,  $S_r(E)$  可被分成几个等价类。设  $\sigma_r: S_r(E) \rightarrow S_r(E)$ , 若对  $\forall f, g \in S_r(E), g(x) = \sigma_r(f(x)) = f(\sigma(x)), x \in E$ , 则称  $\sigma_r$  是  $\sigma \in \Sigma$  诱导出的映射。所以,  $\forall f, g \in S_r(E), fRg \Leftrightarrow \exists \sigma_r: S_r(E) \rightarrow S_r(E)$ , 满足  $\sigma_r(f) = g$ 。

设  $\mathbf{A}$  为  $\sigma \in \Sigma$  在  $E$  中某一组基下所对应的矩阵, 则  $\det(\mathbf{A}) = |\sigma| \neq 0$ 。

**引理 1**<sup>[1]</sup> 设  $F \in S_2(\mathbf{R}^2)$ , 其中  $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, a, b \in \mathbf{R}$ , 则存在  $\sigma \in \Sigma$ , 使得由  $\sigma$  在  $S_2(\mathbf{R}^2)$  上诱导出的等价关系, 把  $S_2(\mathbf{R}^2)$  分成 4 个等价类。这些等价类的标准型如下:

- (1)  $F(x, y) = 0$ ;
- (2)  $F(x, y) = \alpha x^2$ , 其中  $\alpha = \pm 1$ , 当  $D_F = 0, \alpha F > 0$  时;

(3)  $F(x, y) = x^2 - y^2$ , 当  $D_F < 0$  时;

(4)  $F(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$ , 当  $D_F > 0, \alpha F > 0$  时  
其中,  $D_F = ac - b^2$ 。

**引理 2**<sup>[1]</sup> 设  $F \in S_4(\mathbf{R}^2)$ , 形式为

$$F(x, y) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 x y^3 + a_4 y^4$$

其中,  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  为实常数, 则  $\exists \sigma \in \Sigma$ , 使在  $S_4(\mathbf{R}^2)$  上诱导出的等价关系把  $S_4(\mathbf{R}^2)$  分成 10 种不同的等价类, 这些等价类中元素的标准形分别为

- (1)  $F_1(x, y) = 0$ ;
- (2)  $F_2(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)^2$ , 其中  $\alpha = \pm 1$ ;
- (3)  $F_3(x, y) = (x^4 + 6\mu x^2 y^2 + y^4)$ , 其中  $\alpha = \pm 1$ ,  
 $\mu > -1/3, \mu \neq 1/3$ ;
- (4)  $F_4(x, y) = \alpha y^4$ , 其中  $\alpha = \pm 1$ ;
- (5)  $F_5(x, y) = \alpha y^2(6x^2 + y^2)$ , 其中  $\alpha = \pm 1$ ;
- (6)  $F_6(x, y) = 4(y - x)y^3$ ;
- (7)  $F_7(x, y) = 6\alpha y^2(y - x)^2$ , 其中  $\alpha = \pm 1$ ;
- (8)  $F_8(x, y) = \mu(x^4 - y^4)$ , 其中  $\mu \neq 0$ ;
- (9)  $F_9(x, y) = \alpha y^2(x^2 - y^2)$ , 其中  $\alpha = \pm 1$ ;
- (10)  $F_{10}(x, y) = 6\mu^2 x^4 - 6(1 + \mu^4)x^2 y^2 + 6\mu^2 y^4$ ,  
其中,  $\mu > 1$

## 2 齐次多项式系统的分类

考虑多项式向量场  $X = (P, Q)$  为:

\* 收稿日期: 2004-07-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371135); 香港中山大学高等学术研究中心基金会资助项目(05M12)

作者简介: 刘爱莲 (1977年生), 女, 博士; 通讯联系人: 朱思铭; E-mail: stszm@zsu.edu.cn

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=1}^3 P_i(x, y) = P(x, y), \\ \dot{y} &= \sum_{i=1}^3 Q_i(x, y) = Q(x, y)\end{aligned}\quad (1)$$

其中,  $P_i(x, y), Q_i(x, y)$  为  $x, y$  的  $i$  次齐次多项式,  $i = 1, 2, 3$ 。设在  $\mathbf{R}^2$  的某一组基下,  $\sigma \in \Sigma$  所对应的矩阵为:  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  则  $\det(A) = \Delta = \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ 。令  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} dt = |\Delta| ds$ 。则系统(1)化为:

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= \sum_{i=1}^3 \bar{P}_i(u, v) = \bar{P}(u, v), \\ \frac{dv}{ds} &= \sum_{i=1}^3 \bar{Q}_i(u, v) = \bar{Q}(u, v)\end{aligned}$$

其中,  $\bar{P}_i(u, v), \bar{Q}_i(u, v)$  为  $i$  次齐次多项式,  $i = 1, 2, 3$ 。

**引理 3** 令  $F(x, y) = xQ(x, y) - yP(x, y)$ , 则当  $\Delta > 0$  时,  $F$  在  $\sigma$  的作用下是不变的; 即  $\bar{F}(u, v) = F(x, y)$ ; 当  $\Delta < 0$  时, 有  $\bar{F}(u, v) = -F(x, y)$

**证明** 定理前半部分, 见文献 [2]。

以下证明定理后半部分。因为  $\Delta \neq 0$ , 所以

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \text{ 则} \\ \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} \delta P(x, y) - \beta Q(x, y) \\ -\gamma P(x, y) + \alpha Q(x, y) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \bar{P}(u, v) \\ \bar{Q}(u, v) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}F(x, y) &= xQ(x, y) - yP(x, y) = \\ &= (\alpha u + \beta v)Q(x, y) - (\gamma u + \delta v)P(x, y) = \\ &= u(\alpha Q(x, y) - \gamma P(x, y)) - \\ &= v(\delta P(x, y) - \beta Q(x, y)) = \\ &= u(-\bar{Q}(u, v)) - v(-\bar{P}(u, v)) = \\ &= -[u\bar{Q}(u, v) - v\bar{P}(u, v)] = -\bar{F}(u, v)\end{aligned}$$

**引理 4**<sup>[2]</sup> 对系统(1), 其中

$$\begin{aligned}P_1(x, y) &= c_1 x + c_2 y, \quad Q_1(x, y) = d_1 x + d_2 y, \\ P_2(x, y) &= c_3 x^2 + 2c_4 xy + c_5 y^2, \\ Q_2(x, y) &= d_3 x^2 + 2d_4 xy + d_5 y^2, \\ P_3(x, y) &= c_6 x^3 + 3c_7 x^2 y + 3c_8 xy^2 + c_9 y^3, \\ Q_3(x, y) &= d_6 x^3 + 3d_7 x^2 y + 3d_8 xy^2 + d_9 y^3\end{aligned}$$

$$\text{令 } F(x, y) = xQ(x, y) - yP(x, y) = \sum_{i=2}^3 F_i(x, y).$$

其中设

$$\begin{aligned}F_2(x, y) &= \alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2, \\ F_3(x, y) &= \beta_0 x^3 + 3\beta_1 x^2 y + 3\beta_2 xy^2 + \beta_3 y^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_4(x, y) &= \gamma_0 x^4 + 4\gamma_1 x^3 y + 6\gamma_2 x^2 y^2 \\ &\quad + 4\gamma_3 xy^3 + \gamma_4 y^4\end{aligned}$$

则系统(1)可写成如下形式

$$\dot{x} = \sum_{i=2}^3 P_i^*(x, y), \dot{y} = \sum_{i=2}^3 Q_i^*(x, y)$$

其中

$$\begin{aligned}P_1^*(x, y) &= (\rho - \alpha_1)x - \alpha_2 y, \\ Q_1^*(x, y) &= \alpha_0 x + (\rho + \alpha_1)y, \\ P_2^*(x, y) &= (\sigma_1 - \beta_1)x^2 + (\sigma_2 - 2\beta_2)xy - \beta_3 y^2, \\ Q_2^*(x, y) &= \beta_0 x^2 + (\sigma_1 + 2\beta_1)xy + (\sigma_2 + \beta_2)y^2, \\ P_3^*(x, y) &= (p_1 - \gamma_1)x^3 + (p_2 - 3\gamma_2)x^2 y + \\ &\quad (p_3 - 3\gamma_3)xy^2 - \gamma_4 y^3, \\ Q_3^*(x, y) &= \gamma_0 x^3 + (p_1 + 3\gamma_1)x^2 y + \\ &\quad (p_2 + 3\gamma_2)xy^2 + (p_3 + \gamma_3)y^3\end{aligned}$$

这里,  $\rho, \sigma_i (i = 1, 2), p_i (i = 1, 2, 3)$  为实数。

**定理 1** 通过非退化线性变换和正向时间变换。系统

$$\dot{x} = c_1 x + c_2 y, \quad \dot{y} = d_1 x + d_2 y$$

可变为下列 4 种标准型之一:

- (1)  $\dot{x} = \rho x - y = P_{11}, \dot{y} = x + \rho y = Q_{11};$
- (2)  $\dot{x} = \rho x + y = P_{12}, \dot{y} = x + \rho y = Q_{12};$
- (3)  $\dot{x} = \rho x = P_{13}, \dot{y} = \varepsilon x + \rho y = Q_{13}; \varepsilon \pm 1;$
- (4)  $\dot{x} = \rho x = P_{14}, \dot{y} = \rho y = Q_{14}$

**证明** 当  $\Delta > 0$  时, 由引理 4 可得; 当  $\Delta < 0$  时, 令  $y = -y$  即可(文[2,3]忽略了此种情形, 以下类似)。

**定理 2** 任一齐次三次向量场  $X = (P_3, Q_3)$ , 存在  $\sigma \in \Sigma$  和一正向时间变换, 可变成以下标准型之一:

- (1)  $\begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + p_2 x^2 y + p_3 xy^2, \\ \dot{y} = p_1 x^2 y + p_2 xy^2 + p_3 y^3 \end{cases}$
- (2)  $\begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + (p_2 - \alpha)x^2 y + p_3 xy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} = \alpha x^3 + p_1 x^2 y + (p_2 + \alpha)xy^2 + p_3 y^3 \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$
- (3)  $\begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + (p_2 - 3\alpha\mu)x^2 y + p_3 xy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} = \alpha x^3 + p_1 x^2 y + (p_2 + 3\alpha\mu)xy^2 + p_3 y^3 \end{cases} \quad \alpha = \pm 1, \mu > -1/3, \mu \neq 1/3$
- (4)  $\begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + p_2 x^2 y + p_3 xy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} = p_1 x^2 y + p_2 xy^2 + p_3 y^3 \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$
- (5)  $\begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + (p_2 - 3\alpha)x^2 y + p_3 xy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} = p_1 x^2 y + (p_2 + 3\alpha)xy^2 + p_3 y^3 \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$
- (6)  $\begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + p_2 x^2 y + (p_3 + 2)xy^2 - 4y^3, \\ \dot{y} = p_1 x^2 y + p_2 xy^2 + (p_3 - 2)y^2 \end{cases}$
- (7)  $\begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + (p_2 - 3\alpha)x^2 y + (p_3 + 6\alpha)xy^2 - 6\alpha y^3, \\ \dot{y} = p_1 x^2 y + (p_2 + 3\alpha)xy^2 + (p_3 - 6\alpha)y^3, \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$

$$(8) \begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + p_2 x^2 y + p_3 xy^2 + \mu y^3, \\ \dot{y} = \mu x^3 + p_1 x^2 y + p_2 xy^2 + p_3 y^3 \end{cases} \quad \mu \neq 0$$

$$(9) \begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + (p_2 - \frac{\alpha}{2}) x^2 y + p_3 xy^2 + \alpha y^3, \\ \dot{y} = p_1 x^2 y + (p_2 + \frac{\alpha}{2}) xy^2 + p_3 y^3 \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$$

$$(10) \begin{cases} \dot{x} = p_1 x^3 + [p_2 + 3(1 + \mu^4)] x^2 y + p_3 xy^2 - 6\mu^2 y^3, \\ \dot{y} = 6\mu^2 x^3 + p_1 x^2 y + [p_2 - 3(1 + \mu^4)] xy^2 + p_3 y^3 \end{cases}$$

证明 当  $\Delta > 0$  时, 由引理 4 可得; 当  $\Delta < 0$  时, 令  $y = -y$  即可.

定理 3 对任一齐次三次系统  $X = (P_3, Q_3)$ , 总存在  $\sigma \in \Sigma$ , 及一正向时间变换, 使系统化为以下 10 种标准型之一:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{31} = x(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2), \\ \dot{y} = Q_{31} = y(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) \end{cases} \\ \text{II. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{32} = \alpha x^3 + (\beta - 3\mu)x^2 y + \gamma xy^2 - y^3, \\ \dot{y} = Q_{32} = x^3 + \alpha x^2 y + (\beta + 3\mu)xy^2 + \gamma y^3, \\ \mu > -1/3 \end{cases} \\ \text{III. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{33} = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 - y^3, \\ \dot{y} = Q_{33} = \alpha x^2 y + \beta xy^2 + \gamma y^3 \end{cases} \\ \text{IV. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{34} = \alpha x^3 + (\beta - 3)x^2 y + \gamma xy^2 - y^3, \\ \dot{y} = Q_{34} = \alpha x^2 y + (\beta + 3)xy^2 + \gamma y^3 \end{cases} \\ \text{V. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{35} = \alpha x^3 + \beta x^2 y + (\gamma + 2)xy^2 - 4y^3, \\ \dot{y} = Q_{35} = \alpha x^2 y + \beta xy^2 + (\gamma - 2)y^3 \end{cases} \\ \text{VI. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{36} = \alpha x^3 + (\beta + 3)x^2 y + (\gamma - 6)xy^2 + 6y^3, \\ \dot{y} = Q_{36} = \alpha x^2 y + (\beta - 3)xy^2 + (\gamma + 6)y^3 \end{cases} \\ \text{VII. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{37} = \alpha x^3 + (\beta - 3)x^2 y + (\gamma + 6)xy^2 - 6y^3, \\ \dot{y} = Q_{37} = \alpha x^2 y + (\beta + 3)xy^2 + (\gamma - 6)y^3 \end{cases} \\ \text{VIII. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{38} = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + y^3, \\ \dot{y} = Q_{38} = x^3 + \alpha x^2 y + \beta xy^2 + \gamma y^3 \end{cases} \\ \text{IX. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{39} = \alpha x^3 + (\beta - 1/2)x^2 y + \gamma xy^2 + y^3, \\ \dot{y} = Q_{39} = \alpha x^2 y + (\beta + 1/2)xy^2 + \gamma y^3 \end{cases} \\ \text{X. } & \begin{cases} \dot{x} = P_{30} = \alpha x^3 + [\beta + 3(1 + \mu^4)]x^2 y + \gamma xy^2 - 6\mu^2 y^3, \\ \dot{y} = Q_{30} = 6\mu^2 x^3 + \alpha x^2 y + [\beta - 3(1 + \mu^4)]xy^2 + \gamma y^3, \\ \mu > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

以上 10 类所对应的示性多项式  $F_i(x, y) = xQ_{3i}(x, y) - yP_{3i}(x, y)$ , ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) 分别为:

$$\text{I. } F_1(x, y) \equiv 0;$$

$$\text{II. } F_2(x, y) = x^4 + 6\mu x^2 y^2 + y^4, \mu > -1/3;$$

$$\text{III. } F_3(x, y) = y^4;$$

$$\text{IV. } F_4(x, y) = y^2(6x^2 + y^2);$$

$$\text{V. } F_5(x, y) = 4y^3(y - x);$$

$$\text{VI. } F_6(x, y) = -6y^2(y - x)^2;$$

$$\text{VII. } F_7(x, y) = 6y^2(y - x)^2;$$

$$\text{VIII. } F_8(x, y) = x^4 - y^4;$$

$$\text{IX. } F_9(x, y) = y^2(x^2 - y^2);$$

$$\text{X. } F_{10}(x, y) = 6\mu^2 x^4 - 6(1 + \mu^4)x^2 y^2 + 6\mu^2 y^4, \mu > 1$$

证明 注意到, 这里的表达式与定理 2 的不同. 对定理 2, 当  $\alpha = -1$  时, 令  $y = -y$ , 同时以  $\alpha, \beta, \gamma$  替换  $p_1, p_2, p_3$ , 则 I 为 (1); II 为 (2), (3) 的合并; III, IV, V 分别为 (4), (5), (6); VI, VII 分别为 (7) 中  $\alpha = -1$  和  $\alpha = 1$  的情形; VIII, IX, X 分别为 (8), (9), (10)

### 3 缺二次项的三次系统的代数分类

设  $S(E)$  为对称共变张量空间,  $S_1(E), S_2(E), \dots, S_r(E)$  为其子空间, 如果  $\forall F \in S(E)$ , 都有  $F(x, y) = F_1(x, y) + F_2(x, y) + \dots + F_r(x, y)$ , 其中  $F_i \in S_i(E), i = 1, 2, \dots, r$ , 且  $(x, y) \in E$ , 则称  $S(E)$  为  $S_1(E), S_2(E), \dots, S_r(E)$  的直和, 记作:  $S(E) = S_1(E) \oplus S_2(E) \oplus \dots \oplus S_r(E)$ . 反之, 若  $S_i(E), i = 1, 2, \dots, r$  为  $E$  (实数或复数域) 上的对称共变张量空间, 可定义一个新的对称共变张量空间

$$S(E) = S_1(E) \oplus S_2(E) \oplus \dots \oplus S_r(E)$$

其中,  $S_i(E) (i = 1, 2, \dots, r)$  为  $S(E)$  的子空间.

设  $S(E) = S_1(E) \oplus S_2(E) \oplus \dots \oplus S_r(E)$ , 且  $R_i$  为  $\sigma_i(\in E)$  在  $S_i(E)$  上诱导出的等价关系. 又  $D_i$  是  $S_i(E)$  上由  $R_i$  所确定的一个分类, 即

$$D_i = \{D_i^{(1)}, \dots, D_i^{(i)}, D_i^{(i)} \cap D_k^{(j)} = \emptyset (j \neq k)\}$$

则  $D = \times D_i = \{D_{j_1}^{(1)} \times D_{j_2}^{(2)} \times \dots \times D_{j_r}^{(r)} | j_k \in \{1, 2, \dots, i_k\}, k = 1, 2, \dots, r\}$  为  $S(E)$  的一个分类, 即在  $S(E)$  上有一个等价关系  $R$ , 确定了  $S(E)$  上的分类  $D$ . 所以, 由等价关系  $R$ ,  $S(E)$  被分成了  $i_1 \times \dots \times i_r$  个不同的等价类.

设  $S_2(E), S_4(E)$  分别为 2 次, 4 次对称共变张量空间, 令

$$S(E) = S_2(E) \oplus S_4(E)$$

因为  $S_2(E), S_4(E)$  分别被分成 4 个, 10 个不同等价类, 所以  $S(E)$  可分成 40 个等价类.

定理 4 对于一类三次系统

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1 x + c_2 y + c_3 x^3 + 3c_4 x^2 y + 3c_5 xy^2 + c_6 y^3, \\ \dot{y} = d_1 x + d_2 y + d_3 x^3 + 3d_4 x^2 y + 3d_5 xy^2 + d_6 y^3 \end{cases} \quad (2)$$

通过非退化的线性变换和一正向时间变换, 可化为以下 40 种情形之一:

$$\dot{x} = \epsilon y + P_{3j}(x, y), \quad \dot{y} = bx + Q_{3j}(x, y),$$

$$\epsilon = \pm 1, j = 1, 2, \dots, 10;$$

$$\dot{x} = P_{3j}(x, y), \quad \dot{y} = bx + Q_{3j}(x, y),$$

$$j = 1, 2, \dots, 10;$$

$$\dot{x} = ay + P_{3j}(x, y), \quad \dot{y} = bx + \epsilon y + Q_{3j}(x, y),$$

$$\varepsilon = \pm 1, j = 1, 2, \dots, 10;$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + ay + P_{3j}(x, y), \quad \dot{y} = bx + cy + Q_{3j}(x, y),$$

$$\varepsilon = \pm 1, j = 1, 2, \dots, 10 \quad (3)$$

**证明** (采用累次分类法) 令

$$F(x, y) = x(Q_1(x, y) + Q_3(x, y)) - y(P_1(x, y) + P_3(x, y))$$

$$= [xQ_1(x, y) - yP_1(x, y)] + [xQ_3(x, y) - yP_3(x, y)]$$

$$= F_2(x, y) + F_3(x, y)$$

其中,  $F_2(x, y) = xQ_1(x, y) - yP_1(x, y)$ ,  $F_3(x, y) = xQ_3(x, y) - yP_3(x, y)$ 。则由引理 1, 存在  $\sigma_2: S_2(\mathbf{R}^2) \rightarrow S_2(\mathbf{R}^2)$ , (由非退化线性变换  $\sigma^{(2)}$  诱导出) 把  $F_2$  变成标准型  $F_{2c}$ , 则对系统 (2) 作变换  $\sigma^{(2)}$  及时间变换  $t = \|\sigma^{(2)}\|s$ , 其中  $\|\sigma^{(2)}\| = |\det(A^*)|$ ,  $A^*$  是  $\sigma^{(2)}$  所对应的矩阵。假定新坐标仍用  $x, y$  表示, 则由引理 3, 引理 4 及定理 1, 系统 (2) 化为

$$\frac{dx}{ds} = P_{1i}(x, y) + \overline{P_3}(x, y),$$

$$\frac{dy}{ds} = Q_{1i}(x, y) + \overline{Q_3}(x, y), i = 1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

这里  $P_{1i}, Q_{1i}$  如定理 1 所示,  $\overline{P_3}(x, y), \overline{Q_3}(x, y)$  为 3 次齐次多项式。

令  $F_3 = xQ_3(x, y) - yP_3(x, y)$ , 由引理 2, 存在  $\sigma_3: S_3(\mathbf{R}^2) \rightarrow S_3(\mathbf{R}^2)$ ,  $\sigma_3$  是  $\sigma^{(3)} \in \Sigma$  所诱导出的映射, 则  $\sigma_3(F_3) = F_{3c}$  (如定理 3 所示), 设  $\sigma^{(3)}$  所对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 则  $\Delta = \det(A) = ad - bc \neq 0$ 。令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, s = |\Delta| \omega$$

则由引理 3, 引理 4 及定理 3, 系统 (4) 化为:

$$\frac{d}{d\omega} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{3j}(u, v) \\ Q_{3j}(u, v) \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, \dots, 10 \quad (5)$$

$P_{3j}, Q_{3j}$  如定理 3 所定义, 且

$$M_1 = \begin{pmatrix} (ad - bc)\rho - (ab + cd) & -(b^2 + d^2) \\ a^2 + c^2 & (ad - bc)\rho + (ab + cd) \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} (ad - bc)\rho - (ab - cd) & d^2 - b^2 \\ a^2 - c^2 & (ad - bc)\rho + ab - cd \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} (ad - bc)\rho - ab\varepsilon & -b^2\varepsilon \\ a^2\varepsilon & (ad - bc)\rho + ab\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} (ad - bc)\rho & 0 \\ 0 & (ad - bc)\rho \end{pmatrix}$$

令  $u = k\zeta, v = k\eta, \omega = \frac{1}{k^2}\tau (k \neq 0)$ , 则系统

(5) 化为:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2} M_i \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{3j}(\zeta, \eta) \\ Q_{3j}(\zeta, \eta) \end{pmatrix}$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, \dots, 10 \quad (6)$$

考虑  $i = 1$  的情形。

当  $(ad - bc)\rho = ab + cd, (ad - bc)\rho = -(ab + cd)$ , 取  $k^2 = \frac{d^2(a^2 + c^2)}{a^2}$ , 则系统 (6) 化为定理中

第 1 种类型;

当  $(ad - bc)\rho = ab + cd, (ad - bc)\rho \neq -(ab + cd)$ , 取  $k^2 = 2|(ad - bc)\rho|$ , 则系统 (6) 化为定理中的第 3 种类型;

当  $(ad - bc)\rho \neq ab + cd, (ad - bc)\rho = -(ab + cd)$ , 取  $k^2 = 2|(ad - bc)\rho|$ , 则系统 (6) 化为定理中的第 4 种类型;

当  $(ad - bc)\rho \neq ab + cd, (ad - bc)\rho \neq -(ab + cd)$ , 取  $k^2 = |(ad - bc)\rho - (ab + cd)|$ , 则系统 (6) 化为定理中的第 4 种类型。

对于  $i = 2, 3, 4$ , 同理可证。

对一般的二次系统和齐次三次系统, 文 [4, 5] 分析了轨线的有界性。这里通过对缺二次项的三次系统 (2) 进行代数分类, 为解的有界性的讨论提供了极大的方便。对系统 (2) 作第一 Poincaré

变换<sup>[6]</sup>:  $u = \frac{y}{x}, z = \frac{1}{x}, d\tau = \frac{1}{z^2}dt$ , 则

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = Q_3(1, u) - uP_3(1, u) + \\ \quad z^2(Q_1(1, u) - P_1(1, u)), \\ \frac{dz}{d\tau} = -z[P_3(1, u) + z^2P_1(1, u)] \end{cases}$$

对系统 (2) 作第二 Poincaré 变换:  $v = \frac{x}{y}, z = \frac{1}{y}$ ,

$d\tau = \frac{1}{z^2}dt$ , 则

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = P_3(v, 1) - vQ_3(v, 1) + \\ \quad z^2[P_1(v, 1) - vQ_1(v, 1)], \\ \frac{dz}{d\tau} = -z[Q_3(v, 1) + z^2Q_1(v, 1)] \end{cases}$$

令  $F(x, y) = xQ_3(x, y) - yP_3(x, y)$ , 则系统 (2) 的无穷远奇点由  $F(1, u) = 0$  和  $F(v, 1) = 0$  的根确定。所以, 为了讨论系统 (2) 的有界性, 只须讨论与系统 (2) 等价的  $4 \times 10$  类系统 (3) 的无穷远奇点的轨线走向即可。并且注意到, 对于同一个  $j$ , 系统 (3) 有相同的示性多项式, 所以可以简化讨论。对于系统的有界性, 有以下约定: 如果除赤道外, 有轨线正向进入无穷远奇点, 则称此系统无界, 反之, 称系统有界。

**注:**  $j = 2$  时,  $F_2(x, y) = x^4 + 6\mu x^2 y^2 + y^4 (\mu > -\frac{1}{3})$ , 令  $F_2(1, u) = 0, F_2(v, 1) = 0$ , 均无实

根  $u, v$ , 所以不存在无穷远奇点, 故系统  $(3)_{j=2}$  有界。对于其他情形的讨论, 在这里省略, 详细讨论过程可参见文[7]。

#### 参考文献:

- [1] CIMA A, LLIBRE J. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane[J]. J Math Anal Appl, 1990, 147: 420 - 448.
- [2] YANG X A, ZHANG J F. Algebraic classification of polynomial systems in the plane[J]. Ann Diff Eqs, 1990, 6(4): 463 - 480.
- [3] YANG X A, ZHANG J F. Complement and commentary of algebraic classification of polynomial system in the plane[J]. Ann Diff Eqs, 1994, 10(4): 437 - 463.
- [4] DICKSON R J, PERKO L M. Bounded quadratic systems in the plane[J]. J Diff Eqs, 1970, 7(2): 251 - 273.
- [5] LI J M, CAI S L. Global analyses of a class of cubic systems [J]. Acta Math Sini, 1997(2): 207 - 220.
- [6] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [7] 刘爱莲. 一类平面微分动力系统的定性分析及拓扑结构[D]. 济南: 山东师范大学数学系, 2002.

## Algebraic Classification of a Kind of Cubic Polynomial System and Its Applications

LIU Ai-lian<sup>1</sup>, LI Xue-min<sup>2</sup>, ZHU Si-ming<sup>1</sup>

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, China)

**Abstract:** By Llibre's algebraic invariant theory, at first on the basis of classification for quadric and quatic homogeneous binary polynomial, the plane linear and cubic homogeneous polynomial differential systems are classified. Some deficiency in the references is complemented. Secondly, according to the space of symmetric covariant tensors, on algebraic classification to cubic polynomial differential systems without quadratic terms is obtained, keeping the trajectory direction, which gives the same determinant polynomial for the same class. At last, as an application, the boundedness of a class of cubic systems is discussed.

**Key words:** algebraic invariant theory; algebraic classification; boundedness; determinant polynomial