

p 幂零群的一些充分条件^{*}

王丽芳, 王燕鸣

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 群 G 的子群 H 称为半置换的, 若对任意的 $K \leq G$ 只要 $(|H|, |K|) = 1$ 就有 $HK = KH$. H 称为 s -半置换的, 若对任意的 $P \mid |G|$, 只要 $(P, |H|) = 1$ 就有 $PH = HP$, 其中 $P \in \text{Syl}_p(G)$. 本文利用极小子群及极大子群的 s -半置换性得到有限群为 p -幂零群的一些充分条件.

关键词: 极小子群; 极大子群; s -半置换子群; p -幂零群; 有限群

中图分类号: O152 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 02-0001-04

1 研究背景

首先, 介绍本文用到的一些基本概念. G 的一个子群 H 称为拟正规的, 如果 $HK = KH \forall K \leq G$ 成立; H 称为 s -拟正规的, 若 H 与 G 的所有 Syl_p 子群可交换. 作为拟正规、 s -拟正规概念的一个推广, 陈重穆^[1] 引进了半正规、 s -半正规子群的概念. 群 G 的一个子群 H 称为半正规的, 若对任意的 $K \leq G$ 只要 $(|K|, |H|) = 1$ 就有 $KH = HK$; H 称为 s -半正规的, 若对任意的 $P \mid |G|$, 只要 $(P, |H|) = 1$ 就有 $PH = HP$ 其中 $P \in \text{Syl}_p(G)$. 张勤海^[2] 分别称半正规子群、 s -半正规子群为半置换子群、 s -半置换子群.

有许多群论学者利用极小子群和 Syl_p 子群的极大子群的性质研究群性质. 例如: Itô^[3] 证明了: 若奇阶群 G 的所有极小子群在 $Z(G)$ 中, 则 G 为幂零群 (文 [3] 定理 4.2). Buckley^[4] 证明了: 极小子群均正规的奇阶群为超可解群. Shaalan^[5] 证明了: 极小子群及 4 阶循环子群均 s -拟正规的有限群为超可解群. Srinivasan^[6] 证明了: Syl_p 子群的极大子群均正规的有限群为超可解群. 李世荣^[7] 利用极小子群的拟正规性给出了有限群 G 为幂零群的充分条件. 王燕鸣^[8] 利用极小子群的 c -正规性来刻画群的结构.

本文利用极小子群及 Syl_p 子群的极大子群的 s -半置换性得到了有限群为 p -幂零群的一些充分条件.

本文讨论的群均为有限群, 所使用的符号参见文 [9].

2 主要结果

首先给出下面几个引理.

引理 1 [10 Lemma 1, Lemma 2] 设 G 为有限群, H 为 G 的 s -半置换子群.

(1) 若 $H \leq K \leq G$, 则 H 在 K 中 s -半置换.

(2) 若 H 为 p -群, $N \trianglelefteq G$ 则 HN/N 在 G/N 中 s -半置换.

引理 2^① 设 G 为有限群, p 为 $|G|$ 的素因子, 且 $(|G|, p-1) = 1$. 若存在 G 的子群 M 使得 $|G/M| = p$, 则 $M \trianglelefteq G$.

引理 3 [3, VIII 定理 4.2] 设 G 为内 p -幂零群. 则

(1) $|G| = p^a q^b$, 其中 p, q 为素数且 $p \neq q, a, b$ 均为正整数;

(2) G 的 Syl_p 子群 $P \trianglelefteq G$, G 的 Syl_q 子群循环;

(3) 若 $p \neq 2$, 则 $\exp P = p$, 而对于 $p = 2$, 有 $\exp P \leq 4$.

下面给出和证明主要结果.

定理 1 设 G 为有限群, p 为 $|G|$ 的素因子, 且 $(|G|, p-1) = 1$, P 为 G 的 Syl_p 子群. 若 P 的极大子群在 G 中 s -半置换, 则 G 为 p -幂零群. 证明 假设定理不成立, G 为极小阶反例.

(1) $O_p(G) = 1$.

① WEI H Q, WANG Y M The c -supplemented property of finite groups [J]. Proc Math Edinb Soc 2006 (To appear).

* 收稿日期: 2005-03-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271119)

作者简介: 王丽芳 (1978 年生) 女, 博士生; E-mail: lfwang_2003@yahoo.com.cn

假设 $O_p(G) \neq 1$. 显然 $(|G/O_p(G)|, p-1) = 1$ 且 $PO_p(G)/O_p(G)$ 是 $G/O_p(G)$ 的 Sylow p -子群. 由引理 1 可知, $PO_p(G)/O_p(G)$ 的极大子群在 $G/O_p(G)$ 中 s -半置换. 由 G 的极小性得, $G/O_p(G)$ 为 p -幂零群, 从而 G 为 p -幂零群, 矛盾. 因而 $O_p(G) = 1$.

(2) P 非循环.

假设 P 为循环群. 显然有 $P \leq C_G(P) \leq N_G(P)$ 且 $|N_G(P)/C_G(P)|$ 为 $p'-$ 数. 由于 $N_G(P)/C_G(P)$ 同构于 $\text{Aut}(P)$ 的一个子群并且 $|\text{Aut}(P)| = p^{p-1}(p-1)$, 从而 $|N_G(P)/C_G(P)|$ 整除 $(|G|, p-1) = 1$, 因而有 $N_G(P) = C_G(P)$. 由 [11, Theorem 10.1.8] 可知, G 为 p -幂零群. 矛盾. 故 P 非循环.

(3) $O_p(G) \neq 1$.

设 P_1 为 P 的极大子群, Q 为 G 的 Sylow q -子群, 其中 $p \neq q$. 由假设可知 $P_1 Q^x = Q^x P_1, \forall x \in G$. 显然 $P_1 Q < G$. 由文 [12] 可知 G 不为单群. 设 N 为 G 的极小正规子群, 则 $N < G$. 若 $O_p(G) = 1$, 则由 (1) 可知, N 既不是 p -群, 也不是 p' -群. 设 N_p 为 N 的 p -Hall 子群, $N_{p'}$ 为 N 的 Sylow p' -子群.

若 $N_p = P$, 则由引理 1 可知, N 满足定理条件. 由 G 的极小性可得, N 为 p -幂零群. 从而 $1 \neq N_p \trianglelefteq G$, 与 (1) 矛盾.

若 N_p 不是 G 的 Hall p' -子群, 则 $PN < G$ 且 PN 满足定理条件. 由 G 的极小性得, PN 为 p -幂零群, 从而 N 为 p -幂零群. 由此可得 $O_p(G) \neq 1$, 矛盾.

由上可知, 我们可设 $N_p < P$ 且 N_p 为 G 的 Hall p' -子群. 由 Frattini 论断有 $G = N_p N_G(N_p)$. 设 $Q \in \text{Syl}(N_G(N_p))$. 由于 $1 < N_p < P$, 从而 $1 < Q < P$. 因此, 存在 P 的极大子群 P_1 使得 $Q \leq P_1$. 由 P_1 在 G 中 s -半置换得 $P_1 N_G(N_p) = P_1 N_p$ 为 G 的子群. 因为 $|G/P_1 N_p| = p$ 且 $(|G|, p-1) = 1$, 由引理 2 得 $P_1 N_p \trianglelefteq G$. 再次由 Frattini 论断可得 $G = P_1 N_G(N_p) = P_1 N_p < G$, 矛盾. 因而 $O_p(G) \neq 1$.

(4) $O_p(G)$ 为 G 的极小正规子群.

首先, 我们证明 $\Phi(O_p(G)) = 1$. 若 $\Phi(O_p(G)) \neq 1$, 我们考虑商群 $G/\Phi(O_p(G))$. 由引理 1 可知, $P\Phi(O_p(G))$ 的极大子群在 $G/\Phi(O_p(G))$ 中 s -半置换. 由 G 的极小性可知, $G/\Phi(O_p(G))$ 为 p -幂零群. 由于 $\Phi(O_p(G)) \leq \Phi(G)$, 我们有 $G/\Phi(G)$ 为 p -幂零群. 由文 [11, Theorem 9.3.4] 可知, G 为 p -幂零群, 矛盾. 因

而 $\Phi(O_p(G)) = 1$ 且 $O_p(G)$ 为初等交换群.

设 N 为含于 $O_p(G)$ 的 G 的极小正规子群. 显然, G/N 满足定理条件, 由 G 的极小性可得, G/N 为 p -幂零群. 若 $O_p(G)$ 中含有的另一极小正规子群 N_1 , 则有 G/N_1 为 p -幂零群. 从而有 $G \cong G/N \cap N_1 \leq G/N \times G/N_1$ 为 p -幂零群, 矛盾. 故 N 为含于 $O_p(G)$ 的 G 的唯一的极小正规子群.

设 T/N 为 G/N 的正规 p -补. 由 Schur-Zassenhaus 定理可得, $T = NH$, 其中 H 为 G 的 Hall p' -子群. 由 Frattini 论断有, $G = NN_G(H)$ 且 $O_p(G) = N(O_p(G) \cap N_G(H))$. 若 $N < O_p(G)$, 则 $1 \neq O_p(G) \cap N_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$. 由于 $O_p(G)$ 为初等交换群, 故 $O_p(G) \cap N_G(H) \trianglelefteq G$, 矛盾. 从而有 $N = O_p(G)$. 故 $O_p(G)$ 为 G 的极小正规子群.

(5) 得出矛盾.

由引理 1 可知, $G/O_p(G)$ 满足定理条件. 由 G 的极小性可得, $G/O_p(G)$ 为 p -幂零群. 设 $T/O_p(G)$ 为 $G/O_p(G)$ 的正规 p -补. 由 Schur-Zassenhaus 定理可知, 存在 T 的 Hall p' -子群 H 使得 $T = O_p(G)H$. 由 Frattini 论断得 $G = O_p(G)N_G(H)$. 设 Q 为 $N_G(H)$ 的 Sylow p -子群. 由于 $N_G(H) < G$, 故可设 $Q < P$. 因而存在 P 的极大子群 P_1 , 使得 $Q \leq P_1$. 由于 P_1 在 G 中 s -半置换, 从而 $P_1 N_G(H) = P_1 H \leq G$. 显然 $|G/P_1 H| = p$ 且 $(|G|, p-1) = 1$. 由引理 2 可知 $P_1 H \trianglelefteq G$. 因为 $G = O_p(G)N_G(H)$ 且 $P_1 H \trianglelefteq G$, 故有 $G = O_p(G)(P_1 H)$. 由 $O_p(G)$ 的极小正规性得 $O_p(G) \cap P_1 H = 1$. 因而有 $P_1 H \cong G/O_p(G)$, $P_1 H$ 是 p -幂零群且 $H \trianglelefteq G$. 这与 (1) 相矛盾.

由此可见, 极小反例不存在. G 为 p -幂零群. 证完.

注 1 定理 1 中去掉条件 “ $(|G|, p-1) = 1$ ” 结论不一定成立. 例如: 令 $G = S_3$, $p = 3$. 由于 G 的 Sylow 3-子群的极大子群为 1, 故在 G 中 s -半置换. 但是 G 不是 3-幂零群.

由定理 1 可得如下推论:

推论 1 设 p 为 $|G|$ 的素因子, 且 $(|G|, p-1) = 1$. N 为 G 的正规子群且 G/N 为幂零群. 若 P 的极大子群在 G 中 s -半置换, 其中 P 为 N 的 Sylow p -子群, 则 G 为 p -幂零群.

证明 对 $|G|$ 用归纳法.

由引理 1 可知, P 的极大子群在 N 中 s -半置换. 由定理 1 得, N 为 p -幂零群. 设 N_p 为 N 的正规 p -补, 则 $N_p \trianglelefteq G$. 若 $N_p \neq 1$, 则由引理 1 可知, G/N_p 满足题设. 由归纳假设得, G/N_p 为 p -幂零

群。从而 G 为 P -幂零群。因而我们可以假设 $N_P = 1$ 且 $N = P$ 为 P -群。

H/N 为 G/N 的正规 P -补。由 Schur-Zassenhaus 定理可知, 存在 H 的 Hall P' -子群 K , 使得 $H = KN$ 。由定理 1 可知, H 为 P -幂零群。故 G 为 P -幂零群。证毕。

若 P 为 $|G|$ 的最小素因子, 显然有 $(|G|, P-1) = 1$ 。因此由定理 1 可得:

推论 2 设 G 为有限群, P 为 $|G|$ 的最小素因子, P 为 G 的 Sylow P -子群。若 P 的极大子群在 G 中 s -半置换, 则 G 为 P -幂零群。

对于极小子群情形, 有下面的定理:

定理 2 设 G 为有限群, P 为 $|G|$ 的一个素因子, 且 $(|G|, P-1) = 1$, P 为 G 的 Sylow P -子群。若 P 的每个极小子群在 G 中 s -半置换, 且 $P = 2$ 时, P 与四元数群无关, 则 G 为 P -幂零群。

证明 假设定理不成立, G 为极小阶反例。

显然 G 的任一真子群满足定理条件, 由 G 的极小性可知, G 的任一真子群为 P -幂零群。因而 G 为内 P -幂零群。由引理 3 可知, G 的阶为 $p^a q^b$, 其中 $q \neq p$, P 为 G 的正规子群, 且 G 的任一 Sylow q -子群为循环群。当 $p > 2$ 时, $\exp(P) = p$; 当 $p = 2$ 时, $\exp(P) \leq 4$ 。

设 A 为 P 的任一极小子群。由假设可知 $AQ = QA$ 。由引理 2 得, $A \leq N_G(Q)$ 。因而, 若 $\exp(P) = p$, 则有 $P \leq N_G(Q)$ 。因此 $Q \trianglelefteq G$ 从而 G 为 P -幂零群, 矛盾。故 $P = 2$ 且 $\exp(P) = 4$ 。

若 P 为交换群, 则由文 [13] 可知, P 为初等交换群, 从而 $\exp(P) = 2$, 矛盾。因而 P 非交换, 且 $Z(P) < P$ 。由于 G 为内幂零群, 故 $Z(P)Q = Q \times Z(P)$, 从而 $Z(P) \leq Z(G)$ 。由 [14 Theorem 2.8] 可得 $G^N \cap Z(P) \leq G^N \cap P \cap Z(G) = 1$ 。另一方面, 显然 $G^N \leq P$, 且 G^N 在 P 中正规。又因为 $G^N \neq 1$, 由 P -群性质可知, $G^N \cap Z(P) \neq 1$ 。矛盾。

故极小反例不存在, G 为 P -幂零群。

注 2 在定理 2 中去掉条件 “ $(|G|, P-1) = 1$ ” 结论不一定成立。如: 令 $G = S_3$, $P = 3$ 。显然, G 的 3 阶子群在 G 中 s -半置换, 但 G 不为 3-幂零群。

由定理 2 可得:

推论 3 设 P 为 $|G|$ 的一个素因子, 且 $(|G|, P-1) = 1$ 。 N 为 G 的正规子群使得 G/N 为 P -幂零群, P 为 N 的 Sylow P -子群。若 P 的每个极小子群在 G 中 s -半置换, 且 $P = 2$ 时, P 与四元数群无

关, 则 G 为 P -幂零群。

证明 假设定理不成立, G 为极小阶反例。

由定理 2 可知, N 为 P -幂零群。设 N_0 为 N 的正规 P -补, 则 $N_0 \trianglelefteq G$ 。若 $N_0 \neq 1$, 则由引理 1 可知, G/N_0 满足题设。由 G 的极小性可得, G/N_0 为 P -幂零群。从而 G 为 P -幂零群, 矛盾。因而可以假设 $N_P = 1$ 且 $N = P$ 为 P -群。

设 H 为 G 的任一真子群。由引理 1 可知, H 及 $H \cap N$ 满足假设。由 G 的极小性可得, H 为 P -幂零群。因而 G 为内 P -幂零群。由引理 3 可知, G 的阶为 $p^a q^b$, 其中 $q \neq p$, G 有唯一的正规 Sylow P -子群 S 且 G 的任一 Sylow q -子群 Q 为循环群。当 $p > 2$ 时, $\exp(P) = p$; 当 $p = 2$ 时, $\exp(P) \leq 4$ 。

由于 N 为 P -群。故有 $N \leq S$ 。若 $N < S$ 则 NQ 为 G 的真子群。从而 NQ 为 P -幂零群。由于 G/N 为 P -幂零群, 故有 $NQ \trianglelefteq G$ 且 $Q \trianglelefteq NQ$ 。因而 Q 在 G 中正规, 矛盾。因此 $N = S$ 为 G 的 Sylow P -子群。由定理 2 可知, G 为 P -幂零群。最后得出矛盾。

综上所述, 极小反例不存在, G 为 P -幂零群。

若 P 为 $|G|$ 的最小素因子, 显然有 $(|G|, P-1) = 1$ 。因此由定理 2 可得:

推论 4 设 G 为有限群, P 为 $|G|$ 的最小素因子, P 为 G 的 Sylow P -子群。若 P 的每个极小子群在 G 中 s -半置换, 且 $P = 2$ 时, P 与四元数群无关, 则 G 为 P -幂零群。

参考文献:

- [1] 陈重穆. Srinivasan 定理的一个推广 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 1987 12(1): 1-4
- [2] ZHANG Q H On s -semipermutability and abnormality in finite groups [J]. Comm Alg 1999 27(9): 4515-4524
- [3] 徐明耀. 有限群导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1999
- [4] BUCKLEY J Finite groups whose minimal subgroups are normal [J]. Math Z 1970 116(1): 15-17.
- [5] SHAAHAN A The influence of p -quasinormality of some subgroups on the structure of a finite group [J]. Acta Math Hungar 1990 56(3/4): 287-293
- [6] SRINIVASAN S Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups [J]. Israel J Math 1980 35(3): 210-214
- [7] LI Shirong On minimal subgroups of finite groups (III) [J]. Comm Algebra 1998 26(8): 2453-2461
- [8] 王燕鸣. 极小子群对有限群结构的影响 [J]. 数学学报, 2001 44(2): 197-200

(下转第 8 页)

- (4): 383—386
- [8] 陈树辉, 林文静. 索网结构静力分析的动态松弛法 [J]. 应用力学学报, 2002 19(2): 34—37.
- [9] BARNES M R. Dynamic Relaxation Analysis of tension network[J] // Int Conf On Tension Structures. London: 1974 1—11.
- [10] 丁皓江, 何福保, 谢贻权, 等. 弹性和塑性力学中的有限元方法 [M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 1989 79.
- [11] TABARROK B QN Z. Nonlinear analysis of tension structures[J]. Computers and Structures 1992 45 (5/6): 973—984.

Static Analysis of Cable Membrane Structures

LN Wen-jing, CHEN Shu-hui

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The dynamic relaxation (DR) method is applied to the form-finding and static loading analysis of cable membrane structures. An adjustable stiffness coefficient is introduced to ensure calculation stability. This stiffness coefficient can be simply determined by several tests. In the analysis of Form-finding, the geodesic string is introduced to accelerate the convergence of DR method. The typical example shows that the DR method is an effective method for form-finding and static analysis of cable membrane structures.

Key words: cable membrane structure; form-finding; static analysis; dynamic relaxation method

(上接第 3 页)

- [9] DOERK K, HAWKES T. Finite Solvable Groups[M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
- [10] CHEN Zhong-mu. Generalization of the Schur-Zassenhaus Theorem[J]. J Math (PRC), 1998 18 (3): 290—294.
- [11] ROBINSON D J S. A course in the theory of groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [12] LENNOX J C, SIRONJEHEWER S E. Subnormal subgroups of finite groups[M]. Oxford: Clarendon Press, 1987.
- [13] 陈重穆. 内外 Σ -群与极小非 Σ -群[M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 1988.
- [14] DORNHOFF L. M-groups and 2-groups[J]. Math Z 1967 100(2): 226—256.

Some Sufficient Conditions of p-nilpotent Groups

WANG Li-fang, WANG Yan-ming

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Let G be a finite group. A subgroup H of a group G is called semipermutable if it is permutable with every subgroup K of G with $(|H|, |K|) = 1$, and s -semipermutable if it is permutable with every Sylow p -subgroup of G with $(p, |H|) = 1$. The influence of s -semipermutability of minimal subgroups and maximal subgroups of Sylow subgroup of a finite group on its p -nilpotence are investigated.

Key words: minimal subgroup; maximal subgroup; s -semipermutable subgroup; p -nilpotent group; finite group