

解不适定算子方程的多层迭代法^{*}

宋丽红, 陈仲英

(中山大学 科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘要: 将多层迭代法应用于不适定算子方程的数值求解, 给出了利用离散偏差原则确定正则化参数进而求出近似解的快速算法。文章对算法误差进行了理论分析, 并通过算例说明方法的有效性。

关键词: 不适定问题; 正则化方法; 多层迭代方法

中图分类号: O175.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 01-0009-04

1 问题的提出

许多数学物理问题的研究归结为求解不适定问题。Tikhonov 正则化方法是求解不适定问题最常用的方法 (参见文 [1, 2])。当采用某种偏差原理或误差极小化原理决定正则化参数时, 需要进行一个反复的迭代过程, 每一轮迭代过程中都涉及到大量的计算。文 [3] 提出了多层扩充算法, 并将其应用于第二类算子方程; 陈仲英等研究了第一类不适定算子方程的多层扩充算法 (见 CHEN Zhongying et al. Multilevel augmentation methods for solving ill-posed operator equations. Inverse Problem, 2006 to appear); 文 [4] 提出求解第二类积分方程的多层迭代法。本文将采用多层迭代法求解第一类不适定算子方程, 在保证收敛阶的前提下减少计算量, 提高计算效率。

设 X 和 Y 为 Hilbert 空间, 它们的内积和范数为 $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$, K 为 $X \rightarrow Y$ 的具非闭值域的紧线性算子。考虑第一类算子方程

$$Kx = y \quad (1)$$

其中, 右端项 $y (y \neq 0) \in R(K)$ 以误差水平 $\alpha (0 < \alpha \leq \delta)$ 近似地已知, 满足 $\|y - y_0\| \leq \delta, y_0 \in R(K)$ 此处 $R(K)$ 表示 K 的值域。实际上要求解的方程是

$$Kx^\alpha = y \quad (2)$$

方程 (2) 是不适定的。运用熟知的 Tikhonov 正则化方法, 即用适定的算子方程

$$(\alpha I + A)x^\alpha(\alpha) = K^*y \quad (3)$$

去逼近问题 (2), 其中 $A = K^*K, K^*$ 是 K 的伴随算子, $\alpha > 0$ 为正则化参数。

为了数值求解方程 (3), 取 X 的有限维子空间序列 $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, 满足 $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n} = X$ 。令 P_n 为 X 到 X_n 上的正交投影, $A_n = P_n(K^*K)P_n$ 。方程 (3) 的投影近似问题为: 求 $x_n^\alpha(\alpha) \in X_n$, 使得

$$(\alpha I + A_n)x_n^\alpha(\alpha) = P_n y \quad (4)$$

其中, $P_n y = P_n(K^*y)$ 。人们已熟知方程 (3) 和 (4) 都存在唯一解。此外, x_n^α 关于 α 可微且

$$(\alpha I + A_n) \frac{dx_n^\alpha}{d\alpha} = -x_n^\alpha(\alpha) \quad (5)$$

如同文 [5], 假设存在常数序列 $\{\epsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{\eta_n^\delta, n \in \mathbb{N}\}$ 满足

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon_n \leq \epsilon_0, \quad \epsilon_n \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty), \\ 0 < \eta_n^\delta \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty, \delta \rightarrow 0) \end{aligned}$$

使得

$$\|(I - P_n)A^\alpha\| \leq a_{\epsilon_n}^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad (6)$$

$$\|K^*y - P_n y\| \leq \eta_n^\delta \quad (7)$$

其中, a_α 是依赖于 y 的常数。

为了计算正则化参数, 采用如下的偏差原则 (参见文 [5])

$$\|A_n x_n^\alpha(\alpha) - P_n y\| = \frac{\delta^p}{\sqrt{\alpha}} \quad (8)$$

其中, $p > 0$ 令

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \frac{1}{2} (\|A_n x_n^\alpha(\alpha) - P_n y\|^2 - \frac{\delta^p}{\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2} (\alpha^2 \|x_n^\alpha(\alpha)\|^2 - \frac{\delta^p}{\alpha}) \end{aligned} \quad (9)$$

使用 Newton 法解方程 (8) 即选取初始参数 α_0 , 再令

* 收稿日期: 2005-01-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371137, 10201034); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20030558008); 广东省自然科学基金资助项目 (05003308); 中山大学高等学术研究成果基金资助项目

作者简介: 宋丽红 (1976 年生) 女, 博士; 通讯联系人: 陈仲英; E-mail: songlihong@sina.com

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{\varphi(\alpha_i)}{\alpha_i \| \hat{x}_i(\alpha_i) \|^2 + \alpha_i^2 \left(\hat{x}_i(\alpha_i), \frac{d\hat{x}_i(\alpha_i)}{d\alpha} \right) + \frac{\delta^{1p}}{2\alpha_i^2}} \quad (10)$$

按此确定正则化参数的困难在于需要反复求解方程 (4) 和 (5) 以得到 $\hat{x}_i(\alpha)$ 和 $\frac{d\hat{x}_i(\alpha)}{d\alpha}$ 。实际问题往往导致大规模的离散方程组, 从而需要庞大的数据存储和计算工作量。下一节将引进一种快速算法来克服这一困难。

2 多层迭代算法

本节介绍一种求解方程 (4) (或 (5)) 的快速算法——多层迭代算法。算法的基本思想在于利用多尺度基底导出离散方程组, 再利用矩阵的高低频分裂构造快速计算格式。

假设子空间序列 X_n 的有嵌套关系 $X_n \subset X_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$ 。于是可以定义子空间 $W_{n+1} \subset X_{n+1}$ 使得 X_{n+1} 为 X_n 和 W_{n+1} 的正交直和, 即 $X_{n+1} = X_n \oplus^\perp W_{n+1}$ 。这样, 对于 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $\ell \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, 就有子空间多尺度分解 $X_{k+\ell} = X_k \oplus^\perp \dots \oplus^\perp W_{k+\ell}$ 。方程 (4) 当 $n = k + \ell$ 时可以写成

$$(\alpha I + A_{k+\ell}) \hat{x}_{k+\ell}(\alpha) = \hat{f}_{k+\ell} \quad (11)$$

设 $Q_n = P_n - P_{n-1}$, 则算子 $A_{k+\ell}$ 可以写成如下矩阵形式 (参见文 [3]):

$$A_{k+\ell} = \begin{pmatrix} P_k A P_k & P_k A Q_{k+1} & \dots & P_k A Q_{k+\ell} \\ Q_{k+1} A P_k & Q_{k+1} A Q_{k+1} & \dots & Q_{k+1} A Q_{k+\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{k+\ell} A P_k & Q_{k+\ell} A Q_{k+1} & \dots & Q_{k+\ell} A Q_{k+\ell} \end{pmatrix}$$

现在将算子 $A_{k+\ell}$ 分成 2 个算子

$$A_{k+\ell} = A_{k+\ell}^L + A_{k+\ell}^H \quad (12)$$

其中

$$A_{k+\ell}^L = P_k A P_{k+\ell} = \begin{pmatrix} P_k A P_k & P_k A Q_{k+1} & \dots & P_k A Q_{k+\ell} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{k+\ell}^H = (P_{k+\ell} - P_k) A P_{k+\ell} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_{k+1} A P_k & Q_{k+1} A Q_{k+1} & \dots & Q_{k+1} A Q_{k+\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{k+\ell} A P_k & Q_{k+\ell} A Q_{k+1} & \dots & Q_{k+\ell} A Q_{k+\ell} \end{pmatrix}$$

设 $B_{k+1}(\alpha) = \alpha I + A_{k+1}^L$, $C_{k+1} = A_{k+1}^H$, 则方程 (11) 可以写成

$$(B_{k+1}(\alpha) + C_{k+1}) \hat{x}_{k+1}(\alpha) = \hat{f}_{k+1} \quad (13)$$

根据上述矩阵分裂, 求解方程 (11) 的多层迭代格式定义为

$$B_{k+1}(\alpha) \hat{x}_{k+1}^m(\alpha) = -C_{k+1} \hat{x}_{k+1}^{m-1}(\alpha) + \hat{f}_{k+1}, m \in \mathbb{N} \quad (14)$$

设 $d_k = \dim X_k$, 利用多层迭代法求解方程 (11) 的算法如下:

算法 1 给定初始层数 $k > 0$

1) 由方程 (11) ($l = 0$) 求 $\hat{x}_k(\alpha) \in R^{d_k}$ 。

2) 对 $\ell \in \mathbb{N}$ 令 $\hat{x}_{k+1}^0(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{x}_k(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{d_{k+1}}$ 。

3) 对 $m \in \mathbb{N}$ 根据迭代格式 (14) 求出 $\hat{x}_{k+1}^m(\alpha) \in R^{d_{k+1}}$ 。

注 文 [4] 采用 Gauss-Seide 型的矩阵分裂, 本文将文 [3] 提出的高低频矩阵分裂法用于多层迭代算法。由于迭代矩阵的特殊形式, 算法 1 极其简单快速。

利用离散偏差原则 (8) 求正则化参数的算法如下:

算法 2 给定初始参数 $\alpha_0 > 0$

1) 对 $\ell \in \mathbb{N}_0$ 设已求得 $\alpha = \alpha_\ell$, 利用算法 1 求解方程 (4) 和 (5)。

2) 将 1) 求得的 $\hat{x}_k$ 和 $\frac{d\hat{x}_k(\alpha)}{d\alpha}$ 的近似解代入

(10) 式得到新的正则化参数 $\alpha_{\ell+1}$ 。

3) 重复 1) 和 2) 直到在一定精度上满足偏差原则 (8)。

3 收敛性分析

本节对上节算法得到的近似解进行收敛性分析。设 $\hat{x} \in R((K^* K)^v)$ ($v \in (0, 1]$) 为方程 (1) 的最小范数解, 即 $K\hat{x} = y$, $\|\hat{x}\| = \inf \{\|x\| : Kx = y, x \in X\}$ 。并设有 $\omega \in X$ 使得 $\hat{x} = (K^* K)^v \omega$ 。对于离散方程 (4) 的解 $\hat{x}_k(\alpha)$, 有如下估计 (参见 CHEN Zhongying et al. Inverse Problem, 2006 to appear)。

引理 1 设条件 (6) 和 (7) 成立, 则对于 $n = k + \ell$

$$\|\hat{x} - \hat{x}_{k+1}(\alpha)\| \leq \|\omega\| \alpha^v + \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{(2\alpha_{1+v} + \alpha_1 \alpha^v) \|\omega\|}{\alpha} \epsilon_{k+1}^{1+v} \quad (15)$$

下面估计多层迭代解 $\hat{x}_{k+1}^m(\alpha)$ 与投影近似解 $\hat{x}_{k+1}(\alpha)$ 的误差。

定理 1 设条件 (6) 成立, 则算法 1 收敛, 并且存在正整数 N 和 M 使得 $k \geq N, m \geq M \in \mathbb{N}$ 时

$$\|x_k^m(\alpha) - x_{k-1}^m(\alpha)\| \leq \zeta \alpha^v \tag{16}$$

其中, $\zeta = 2\|K\|(\|Y\| + \hat{\eta})$.

证明 方程 (13) 和 (14) 相减得到误差方程

$$\begin{aligned} &B_{k+1}(\alpha)(x_k^m(\alpha) - x_{k-1}^m(\alpha)) = \\ &-C_{k+1}(x_k^{m-1}(\alpha) - x_{k-1}^m(\alpha)), m \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{17}$$

注意

$$\|C_{k+1}\| = \|(P_{k+1} - P_k)AP_{k+1}\| \leq (P_{k+1}A - P_kA)$$

由于 A 是紧线性算子, P_n 点态收敛于恒等算子 I , 故当 $m \rightarrow +\infty$ 时, $\|P_nA - A\| \rightarrow 0$ 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|C_{k+1}\| \rightarrow 0 \tag{18}$$

对 $k \in \mathbb{N}$ 一致. 另一方面

$$\begin{aligned} \|B_{k+1}(\alpha)\| &= \|(\alpha I + A_{k+1}) - C_{k+1}\| \geq \\ &\alpha - \|C_{k+1}\| \end{aligned} \tag{19}$$

由 (17) 和 (19) 式, 当 k 充分大时,

$$\begin{aligned} &\|x_k^m(\alpha) - x_{k-1}^m(\alpha)\| \leq \\ &\frac{\|C_{k+1}\|}{\alpha - \|C_{k+1}\|} \|x_k^{m-1}(\alpha) - x_{k-1}^m(\alpha)\| \leq \\ &\left(\frac{\|C_{k+1}\|}{\alpha - \|C_{k+1}\|}\right)^m \|x_k^0(\alpha) - x_{k-1}^m(\alpha)\| \leq \\ &\left(\frac{\|C_{k+1}\|}{\alpha - \|C_{k+1}\|}\right)^m \|x_k^0(\alpha) - x_{k-1}^0(\alpha)\| \end{aligned}$$

由方程 (4), 对任意 $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_k^0(\alpha)\| &= \|(\alpha I + A_k)^{-1}P_n(K^*y)\| \leq \\ &\alpha^{-1}\|K\|(\|Y\| + \hat{\eta}) \end{aligned}$$

因此

$$\|x_k^m(\alpha) - x_{k-1}^m(\alpha)\| \leq \frac{\zeta}{\alpha} \left(\frac{\|C_{k+1}\|}{\alpha - \|C_{k+1}\|}\right)^m \tag{20}$$

据 (20) 和 (18) 知有 N' , 当 $k \geq N', k \in \mathbb{N}$ 时,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k^m(\alpha) - x_{k-1}^m(\alpha)\| = 0$$

即迭代算法 1 收敛. 特别地, 存在 $M \in \mathbb{N}$ 使得 $m \geq M \in \mathbb{N}$ 时, (16) 式成立. 证毕.

综合引理 1 和定理 1 得到如下结论.

定理 2 设条件 (6) 和 (7) 成立, 则有正整数 N 和 M 使当 $k \geq N, m \geq M \in \mathbb{N}$ 时

$$\begin{aligned} \|x_k - x_k^m(\alpha)\| &\leq (\|w\| + \zeta)\alpha^v + \\ &\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{(2\alpha_{1+v} + \alpha_1\alpha^v)\|w\|}{\alpha} \epsilon_{k+1}^{1+v} \end{aligned}$$

根据定理 2 并运用文 [4] 的方法可以得到按偏差原则 (8) 确定正则化参数相应的多层迭代解的误差估计, 即有如下定理:

定理 3 设由算法 2 确定, 其中 $k \in [1, 3)$,

又设条件 (6) 和 (7) 成立, 则存在正数 η 和 $\hat{\eta}$, 正整数 N', L 和 M 使当 $k \geq N', k \geq L, m \geq M$ 时

$$\|x_k - x_k^m(\alpha)\| \leq c\delta^{\frac{1}{v+1}}$$

其中, $\epsilon = \min\{\frac{2^p v}{3}, 1 - \frac{p}{3}\}$. 特别地 $p = \frac{3}{2v+1}$ 时,

有最佳收敛阶估计

$$\|x_k - x_k^m(\alpha)\| \leq c\delta^{\frac{v}{v+1}}$$

4 数值算例

本节用数值例子说明算法的有效性. 下面利用第 1, 2 节的算法来求解第一类不适定 Fredholm 积分方程:

$$(Kx)(t) = y(t), 0 \leq t \leq 1$$

其中, 算子 $K: L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ 是如下定义的紧线性算子:

$$(Kx)(t) = \int_0^1 \sin(t+s)x(s)ds$$

右端项

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8} \sin \frac{9+2t}{2} + \frac{5}{8} \sin \frac{1+2t}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2t-1}{2} - \\ &\frac{1}{4} \cos \frac{3+2t}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{2t-5}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{2t+5}{2} \end{aligned}$$

方程的最小范数解

$$x^* = \cos \frac{2s-1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2s+5}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2s+1}{2}$$

我们用离散偏差原则 (8) 和算法 2 确定正则化参数 α , 用算法 1 求解方程 (4) 和 (5). 在算法中采用如下的多尺度的子空间及其基底: $X_0 = \text{span}\{\omega_{00}, \omega_{01}\}$, $W_i = \text{span}\{\omega_{10}, \omega_{11}\}$, $W_i = \text{span}\{\omega_{ij} \in Z_{w(i)}\}$ ($Z_i = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $w(i) = \dim(W_i) = 2^i$), 其中

$$\begin{cases} \omega_{00}(s) = 1 \\ \omega_{01}(s) = 2\sqrt{3}(s-1/2) \\ \omega_{10}(s) = 6(s-1/2) - 2\text{sgn}(s-1/2) \\ \omega_{11}(s) = 4\sqrt{3}|s-1/2| \\ \omega_{1j}(s) = \sqrt{2}\omega_{1-k}(2^j s) \chi_{[0, 1/2]} \\ \omega_{i, 2^i+1+j}(s) = \sqrt{2}\omega_{1-k}(2^{i-1} s) \chi_{[1/2, 1]} \\ 0 \leq k \leq 2^{i-1}, i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

此处 χ_A 表示集 A 的特征函数. 本例可以验证 $\forall n$,

因此为了得到最佳收敛阶, 在计算中取 $p = \frac{3}{2v+1}$.

此外, 在算法 1 中取 $k=6, l=3$. 数值计算结果如表 1 和表 2 所示.

表 1 数值结果（取不同的初始正则化参数）
Tab 1 Numerical results with different initial regularization parameter α_0

迭代次数	α_0	α	δ	$\frac{\delta^2}{\delta_0^2}$	$\ x_* - x_{km}^{\delta}(\alpha)\ _{12}$	t/s
7	10^{-1}	0.013797	0.001	0.01	0.014165	1.35
5	10^{-2}	0.013797	0.001	0.01	0.014165	1.05
9	10^{-3}	0.013797	0.001	0.01	0.014165	1.68
12	10^{-4}	0.013797	0.001	0.01	0.014165	2.26
15	10^{-4}	0.013797	0.001	0.01	0.014165	2.80

表 2 数值结果（取不同的扰动水平）
Tab 2 Numerical results with different disturbance δ

迭代次数	α_0	α	δ	$\frac{\delta^2}{\delta_0^2}$	$\ x_* - x_{km}^{\delta}(\alpha)\ _{12}$	t/s
5	0.0100	0.013797	0.001	0.0100	0.014165	1.05
6	0.0100	0.022071	0.002	0.0159	0.020120	1.20
6	0.0100	0.029105	0.003	0.0208	0.025674	1.13
7	0.0100	0.035457	0.004	0.0252	0.030643	1.35
7	0.0100	0.041354	0.005	0.0292	0.035169	1.35

表中， α_0 为选取的正则化参数初始值， α 是按算法 2 求出的正则化参数值， t 是指迭代（包括解方程）所需的时间，单位秒。表 1 表明当 δ 为一确定的值时，对于不同 α 的初始值，都得到了相同的正则化参数值。表 2 对于不同的扰动 δ 固定取 α 的初始值为 0.01，得到不同的正则化参数 α 。2 个表的计算结果都与理论结果相符。

参考文献:

[1] GROETSCH C.W. The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Integral Equations of the First Kind [J]. Research Notes in Mathematics, 105, Boston: Pitman, 1984

[2] 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003

[3] CHEN Z Y, WU B, XU Y S. Multilevel augmentation methods for solving operator equations [J]. Numer Math J Chinese U, 2005, 14: 31—55

[4] FANG W F, MA F M, XU Y S. Multilevel iteration methods for solving integral equations of the second kind [J]. J Integral Equations Appl, 2002, 14: 355—375

[5] ENGL H W. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems [J]. J Optim Th and App, 1987, 52(2): 209—215

A Multilevel Iteration Method for Solving Ill-Posed Operator Equations

SONG Li-hong, CHEN Zhong-ying
(Department of Scientific Computing and Computer Applications,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The multilevel iteration method is applied to solve ill-posed operator equations of the first kind. Based on the discrete discrepancy principle, the fast algorithm for approximate solution and regularization parameter is given. The error estimate is obtained and the numerical experiment for integral equation of the first kind is presented to illustrate the efficiency of the algorithm.

Key words: ill-posed problem; regularization method; multilevel iteration method