

# 动态不确定模糊集<sup>\*</sup>

黎永锦<sup>1,2</sup>, 赵志红<sup>2</sup>, 高东平<sup>1</sup>

(1. 中山大学逻辑与认知研究所, 广东 广州 510275;

2. 中山大学数学系, 广东 广州 510275)

**摘要:** Zadeh 的模糊集理论主要用来处理不精确和不完全信息的不确定。提出了动态不确定模糊集的概念, 它是模糊集和不确定模糊集的推广, 在处理动态和不确定问题时具有很多优点。动态不确定模糊集的性质得到了深入研究, 并给出了动态不确定模糊集关于生成集的一个刻画。

**关键词:** 模糊集; 不确定模糊集; 不确定动态模糊集

**中图分类号:** O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 03-0012-03

美国控制论专家 Zadeh 教授<sup>[1]</sup>于 1965 年发表了“Fuzzy Set”的论文, 提出了模糊集的概念, 对模糊现象进行了数学描述。但 Zadeh 教授提出的模糊集仅仅是在封闭世界假定下的一次性的描述。Wittgenstein<sup>[2]</sup>在 1953 年就提出家族类似理论, 指出存在象“游戏”这一类的概念, 它们的特点是: 在一般情况下, 无法给出一组充要条件对它进行定义, 而它们的意义和内涵在使用中不断变化。现实世界是个开放的、复杂的、动态的世界, 因此, 在现实世界中的许多模糊现象具有不确定性和动态性的特点, 即在持续时间内现象的本质特征在不断地发生变化, 且有着一定的不确定性。

## 1 动态不确定模糊集

王光远等<sup>[3-5]</sup>研究了动态模糊集, 在这里, 我们将动态模糊集推广到动态不确定模糊集, 并研究它们的主要性质和生成集问题。

**定义 1** 设  $U$  是论域,  $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$ ,  $T \subset \mathbf{R}^+$ , 在论域  $U$  上给定映射:

$$\mu: U \times T \rightarrow [0, 1];$$

$$\nu: U \times T \rightarrow [0, 1];$$

$$\eta: U \times T \rightarrow [0, 1]$$

若

$$\mu(u, t) + \nu(u, t) + \eta(u, t) = 1$$

对于  $\forall u \in U$  和  $\forall t \in T$  成立, 则说  $(\mu, \eta, \nu)$  在  $U$  上确定了一个关于  $T$  的动态不确定模糊集  $A(t)$ ,  $\mu_A(u, t)$  称为  $u$  在  $t$  处关于  $A(t)$  的属于程度, 简记

为  $A^\mu(u, t)$ ;  $\nu_A(u, t)$  称为  $u$  在  $t$  处关于  $A(t)$  的不属于程度, 简记为  $A^\nu(u, t)$ ;  $\eta_A(u, t)$  称为  $u$  在  $t$  处关于  $A(t)$  的不确定程度, 简记为  $A^\eta(u, t)$ 。  $\Psi(U \times T)$  表示  $U$  上关于  $T$  的动态不确定模糊集全体, 简记为  $\Psi$ 。

显然, 动态不确定模糊集合是模糊集和不确定模糊集的推广, 模糊集合和不确定模糊集只是动态不确定模糊集合的特殊情形。动态不确定模糊集可以用来刻画“游戏”和“中山大学的学生”这类不断变化又不确定的模糊概念。我们可以利用动态不确定模糊集在时空系列中考察系统, 在任一时空断面上, 演化着的自然客体和人工客体都可以被描述为不确定模糊集, 也容许未知对象进入研究领域。

## 2 动态不确定模糊集的运算和性质

与模糊集类似, 先定义动态不确定模糊集的各种运算如下。

**定义 2** 设  $A(t), B(t) \in \Psi$ , 若  $\forall t \in T, \forall u \in U$ , 均有  $A^\mu(u, t) < B^\mu(u, t)$  或当  $A^\mu(u, t) = B^\mu(u, t)$  时  $A^\eta(u, t) \geq B^\eta(u, t)$ , 则称  $A(t)$  包含于  $B(t)$ , 或  $B(t)$  包含  $A(t)$ , 记作  $A(t) \subset B(t)$ ; 若  $\forall t \in T, \forall u \in U$ , 均有  $A^\mu(u, t) = B^\mu(u, t)$ ,  $A^\eta(u, t) = B^\eta(u, t)$ , 则称  $A(t)$  等于  $B(t)$ , 记作  $A(t) = B(t)$ 。

设  $\Phi$  表示  $A^\mu(u, t) = 0, A^\eta(u, t) = 0$  的动态不确定模糊集合,  $\Omega$  表示  $A^\mu(u, t) = 1$  的动态不确定模糊集合。

\* 收稿日期: 2004-06-08

基金项目: 教育部人文社会科学重点研究基地重大基金资助项目 (2000ZDX720 40002); 教育部跨世纪人才基金资助项目 (99JA720001)

作者简介: 黎永锦 (1963 年生), 男, 副教授; E-mail: stslj@zsu.edu.cn

易见:

- (1)  $\forall t \in T, \Phi \subset A(t) \subset \Omega$ ;
- (2)  $\forall t \in T, A(t) \subset A(t)$ ;
- (3)  $\forall t \in T$ , 若  $A(t) \subset B(t)$  且  $B(t) \subset A(t)$ , 则  $A(t) = B(t)$ ;
- (4)  $\forall t \in T$ , 若  $A(t) \subset B(t)$  且  $B(t) \subset C(t)$ , 则  $A(t) \subset C(t)$ .

定义3 设  $A(t), B(t) \in \Psi$ ,

(1)

$$(A \cup B)^{\mu}(u, t) = \max\{A^{\mu}(u, t), B^{\mu}(u, t)\};$$

$$(A \cup B)^{\eta}(u, t) = \min\{A^{\eta}(u, t), B^{\eta}(u, t)\};$$

$$(A \cup B)^{\nu}(u, t) =$$

$$1 - (A \cup B)^{\mu}(u, t) - (A \cup B)^{\eta}(u, t).$$

(2)

$$(A \cap B)^{\mu}(u, t) = \min\{A^{\mu}(u, t), B^{\mu}(u, t)\};$$

$$(A \cap B)^{\eta}(u, t) = \max\{A^{\eta}(u, t), B^{\eta}(u, t)\};$$

$$(A \cap B)^{\nu}(u, t) =$$

$$1 - (A \cap B)^{\mu}(u, t) - (A \cap B)^{\eta}(u, t).$$

有了上述定义, 下面将讨论动态不确定模糊集的基本性质. 动态不确定模糊集具有如下性质:

性质1 设  $A(t), B(t), C(t) \in \Psi, \forall t \in T$ , 有

$$(1) A(t) \cup A(t) = A(t), A(t) \cap A(t) = A(t);$$

$$(2) A(t) \cup B(t) = B(t) \cup A(t), A(t) \cap B(t) = B(t) \cap A(t);$$

$$(3) (A(t) \cup B(t)) \cup C(t) = A(t) \cup (B(t) \cup C(t)),$$

$$(A(t) \cap B(t)) \cap C(t) = A(t) \cap (B(t) \cap C(t));$$

$$(4) (A(t) \cup B(t)) \cap A(t) = A(t),$$

$$(A(t) \cap B(t)) \cup A(t) = A(t);$$

$$(5) (A(t) \cup B(t)) \cap C(t) = (A(t) \cap C(t)) \cup (B(t) \cap C(t)),$$

$$(A(t) \cap B(t)) \cup C(t) = (A(t) \cup C(t)) \cap (B(t) \cup C(t));$$

$$(6) A(t) \cup \Omega = \Omega, A(t) \cap \Omega = A(t)$$

$$A(t) \cup \Phi = A(t), A(t) \cap \Phi = \Phi.$$

### 3 动态不确定模糊集的生成集

设  $F \subset X^T = \{f | f: T \rightarrow U\}$ , 并始终满足: 任意的  $(u_0, t_0) \in U \times T$ , 存在  $f \in F$ , 有  $f(t_0) = u_0$ , 当  $U \in \mathbf{R}^1$  时,  $F$  常为某个函数空间.

定义4 给定动态不确定模糊集及  $F$  为  $F$  上的不确定模糊集, 若  $A(t)$  与  $F$  之间满足

$$F^{*\mu}(u, t) = \bigvee \{F^{\mu}(f) | f \in F, f(t) = u\} =$$

$$A^{\mu}(u, t) \quad (1)$$

$$F^{*\eta}(u, t) = \bigwedge \{F^{\eta}(f) | f \in F, f(t) = u\} = A^{\eta}(u, t) \quad (2)$$

$$F^{*\nu}(u, t) = 1 - F^{*\mu}(u, t) - F^{*\eta}(u, t)$$

记  $F^*(u, t) = (F^{*\mu}(u, t), F^{*\eta}(u, t), F^{*\nu}(u, t))$  则称  $A(t)$  为由  $F$  生成的不确定动态模糊集或称  $F$  为  $A(t)$  的生成集, 简记  $A(t) = F^*(t)$ .

假定  $F$  生成  $A(t)$ , 由 (1), (2) 式知对任意  $f \in F$  及任意的  $t \in T$ , 有

$$F^{\mu}(f) \leq A^{\mu}(f(t), t), F^{\eta}(f) \geq A^{\eta}(f(t), t) \quad (3)$$

定理1 给定动态不确定模糊集  $A(t) (t \in T)$ , 它能由某个  $F$  上的不确定模糊集  $F$  生成的充要条件是对任意的  $(u_0, t_0) \in U \times T$ , 均有

$$\bigvee \{ \bigwedge_{t \in T} A^{\mu}(f(t), t) | f \in F, f(t_0) = u_0 \} = A^{\mu}(u_0, t_0) \quad (4)$$

$$\bigwedge \{ \bigvee_{t \in T} A^{\eta}(f(t), t) | f \in F, f(t_0) = u_0 \} = A^{\eta}(u_0, t_0) \quad (5)$$

此时, 有一最大的能生成  $A(t)$  的函数不确定模糊集  $F_{\max}$ ,

$$F_{\max}^*(u, t) = (F_{\max}^{*\mu}(u, t), F_{\max}^{*\eta}(u, t), F_{\max}^{*\nu}(u, t)) = (\bigwedge_{t \in T} A^{\mu}(f(t), t), \bigvee_{t \in T} A^{\eta}(f(t), t), 1 - \bigwedge_{t \in T} A^{\mu}(f(t), t) - \bigvee_{t \in T} A^{\eta}(f(t), t)) \quad (6)$$

证明 充分性: 任意的  $(u_0, t_0) \in U \times T$ , 按式 (6) 定义  $F_{\max}$ , 有

$$\bigvee \{ F_{\max}^{\mu} | f \in F, f(t_0) = u_0 \} = \bigvee \{ \bigwedge_{t \in T} A^{\mu}(f(t), t) | f \in F, f(t_0) = u_0 \} = A^{\mu}(u_0, t_0),$$

$$\bigwedge \{ F_{\max}^{\eta} | f \in F, f(t_0) = u_0 \} = \bigwedge \{ \bigvee_{t \in T} A^{\eta}(f(t), t) | f \in F, f(t_0) = u_0 \} = A^{\eta}(u_0, t_0)$$

故  $F_{\max}^*(t) = A(t)$ .

必要性: 设  $F_{\max}^*(t) = A(t)$ , 由 (3) 式有

$$\bigvee \{ \bigwedge_{t \in T} A^{\mu}(f(t), t) | f \in F, f(t_0) = u_0 \} \geq \bigvee \{ F_{\max}^{\mu} | f \in F, f(t_0) = u_0 \} = A^{\mu}(u_0, t_0),$$

$$\bigwedge \{ \bigvee_{t \in T} A^{\eta}(f(t), t) | f \in F, f(t_0) = u_0 \} \leq \bigwedge \{ F_{\max}^{\eta} | f \in F, f(t_0) = u_0 \} = A^{\eta}(u_0, t_0)$$

但显然有

$$\bigvee \{ \bigwedge_{t \in T} A^{\mu}(f(t), t) | f \in F, f(t_0) = u_0 \} \leq A^{\mu}(u_0, t_0),$$

$$\bigwedge \{ \bigvee_{t \in T} A^{\eta}(f(t), t) | f \in F, f(t_0) = u_0 \} \geq A^{\eta}(u_0, t_0)$$

故 (6) 式成立.

设  $F$  为  $F$  上的不确定模糊集,  $A(t) = F^*(t)$ ,

由式 (3) 知, 对任意的  $f \in F$ , 有  $F^\mu(f) \leq F_{\max}^\mu(f)$ ,  $F^\eta(f) \geq F_{\max}^\eta(f)$ , 所以  $F_{\max}$  是  $A(t)$  在  $F$  上的最大生成集。

定义 5 称  $g: T \rightarrow U$  为  $A(t)$  ( $t \in T$ ) 的一条脊线, 如果对  $\forall t \in T$ , 都有

$$A^\mu(g(t), t) = \bigvee_{u \in U} A^\mu(u, t) \quad (7)$$

$$A^\eta(g(t), t) = \bigwedge_{u \in U} A^\eta(u, t) \quad (8)$$

定理 2 动态不确定模糊集  $A(t)$  ( $t \in T$ ) 在  $F$  上有生成集的必要条件: 若  $g \in F$  是  $A(t)$  的一条脊线, 则  $g$  必是  $A(t)$  的等高线, 亦

$$A^\mu(g(t), t) = \bigvee \{A^\mu(u, t) \mid u \in U, t \in T\} \quad (9)$$

$$A^\eta(g(t), t) = \bigwedge \{A^\eta(u, t) \mid u \in U, t \in T\} \quad (10)$$

证明 设  $F^*(t) = A(t)$ , 任意的  $t_1, t_2 \in T$ , 若

$$A^\mu(g(t_1), t_1) \neq A^\mu(g(t_2), t_2)$$

或

$$A^\eta(g(t_1), t_1) \neq A^\eta(g(t_2), t_2)$$

不妨假定

$$A^\mu(g(t_1), t_1) = \lambda_1 > \lambda_2 = A^\mu(g(t_2), t_2),$$

则有

$$\begin{aligned} A^\mu(g(t_1), t_1) &= \bigvee \{F^\mu(f) \mid f \in F, f(t_1) = g(t_1)\} \leq \\ &\bigvee \{ \bigwedge_{t \in T} A^\mu(f(t), t) \mid f \in F, f(t_1) = g(t_1) \} \leq \\ &\bigvee \{ \bigwedge_{t \in T} A^\mu(g(t), t) \mid f \in F, f(t_1) = g(t_1) \} = \\ &\bigwedge_{t \in T} A^\mu(g(t), t) \leq \bigvee_{t \in T} A^\mu(g(t_2), t_2) = \lambda_2 \end{aligned}$$

矛盾。所以

$$A^\mu(g(t_1), t_1) = A^\mu(g(t_2), t_2)$$

即  $A^\mu(g(t), t)$  为一常数, 显然 (9) 成立; 同理可证

$$A^\eta(g(t_1), t_1) = A^\eta(g(t_2), t_2)$$

即  $A^\eta(g(t), t)$  为一常数, 显然 (10) 式成立。

定理 3 动态不确定模糊集  $A(t)$  ( $t \in T$ ) 在  $F$  上有生成集的充分条件: 对  $\forall (u_0, t_0) \in U \times T$ , 都有  $f_0 \in F$ , 使  $f_0(t_0) = u_0$ , 且

$$A^\mu(f_0(t), t) = A^\mu(f_0(t_0), t_0), A^\eta(f_0(t), t) = A^\eta(f_0(t_0), t_0)$$

证明 若上述条件成立, 则

$$\bigwedge \{ \bigvee_{t \in T} A^\mu(f(t), t) \mid f \in F, f(t_0) = u_0 \} \geq$$

$$\bigvee_{t \in T} A^\mu(f_0(t), t) = A^\mu(f_0(t_0), t_0) = A^\mu(u_0, t_0),$$

反向不等式显然成立。

$$\bigwedge \{ \bigvee_{t \in T} A^\eta(f(t), t) \mid f \in F, f(t_0) = u_0 \} \leq$$

$$\bigvee_{t \in T} A^\eta(f_0(t), t) = A^\eta(f_0(t_0), t_0) = A^\eta(u_0, t_0),$$

反向不等式显然成立, 所以条件 (4), (5) 成立, 由定理 1 知定理 3 成立。

动态不确定模糊集的函数生成集是研究某些动态不确定模糊过程的有效工具。

参考文献:

- [1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338—353.
- [2] WITTGENSTEIN L. Philosophical investigations[M]. Oxford: Basil Blackwell, 1953.
- [3] 王光远, 欧进萍. 动态模糊集[J]. 模糊系统与数学, 1988, 2: 1—8.
- [4] 王光远, 欧进萍. 动态模糊集合与模糊过程初论[J]. 大自然探索, 1987, 6: 49—55.
- [5] 哈明虎, 王光远. 再论动态模糊集的基本性质[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 1997, 2: 1—5.
- [6] AHMAD R, SALAHUDDIN, IRFAN S S. Generalized quasi-complementarity problems with fuzzy set valued mappings[J]. Int J Fuzzy Syst, 2003, 5: 194—199.
- [7] MAHMOUD R A. On fuzzy quasi continuity and an application of fuzzy set theory[J]. Chaos Solitons Fractals, 2003, 18: 179—185.

## Dynamic Uncertain Fuzzy Sets

LI Yong jin<sup>1,2</sup>, ZHAO Zhi hong<sup>2</sup>, GAO Dong ping<sup>1</sup>

(1. The Institute of Logic and Cognition, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** Theories of Zadeh's fuzzy sets have emerged as major mathematical approaches for managing uncertainty that arises from inexact or incomplete information. The concept of dynamic uncertain fuzzy set is introduced, which is a generalization of fuzzy sets and uncertain fuzzy sets that have many advantages in dealing with the dynamic and uncertain problems. Some of its basic properties are studied and a characterization of dynamic uncertain fuzzy sets is given.

**Key words:** fuzzy sets; uncertain fuzzy sets; dynamic uncertain fuzzy sets