

一类微分系统无穷远点的中心与拟等时中心*

黄文韬¹, 刘一戎², 朱芳来¹

(1. 桂林电子工业学院计算科学与数学系, 广西 桂林 541004;

2. 浙江师范大学数学系, 浙江 金华 321004)

摘 要: 给出了微分系统无穷远点等时中心、拟等时中心的定义。通过奇点量与周期常数的计算, 得到了一类三次多项式微分系统无穷远点的中心条件与拟等时中心条件, 同步解决了一类有理系统的无穷远点的等时中心问题。

关键词: 无穷远点; 中心; 等时中心; 拟等时中心

中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 04-0024-04

在平面微分自治系统定性理论中, 如何决定奇点的中心与等时中心条件是个非常困难的经典问题。对于原点是初等奇点的中心条件与等时中心条件问题, 许多学者进行了研究, 已经有了大量的结果^[1-3]。对于无穷远点的中心条件问题的研究^[4,5], 主要集中在对下述 $2n+1$ 次系统的讨论上

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sum_{k=0}^{2n} X_k(x, y) - y(x^2 + y^2)^n \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{k=0}^{2n} Y_k(x, y) + x(x^2 + y^2)^n\end{aligned}\quad (1)$$

这里 $X_k(x, y), Y_k(x, y)$ 是关于 x, y 的 k 次齐次多项式。该系统 Poincaré 闭球面上的赤道 Γ_∞ 为系统的轨线, 其上设有实奇点, 称 Γ_∞ 为系统的赤道环或无穷远点。至于微分系统无穷远点的等时中心问题则是一个新领域, 仅有文[6]对一类五次系统进行过研究。

1 系统无穷远点化为坐标原点

本文研究形如方程组(1)的一类实三次系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2 - y(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2 + x(x^2 + y^2)\end{aligned}\quad (2)$$

无穷远点的中心与拟等时中心问题。

把多项式系统无穷远点转化为系统原点去研究, 是微分系统赤道环研究的手段之一, Bendixson 倒径变换可把某些系统的无穷远点转化为 Poincaré 型系统的原点, 然而它对系统(2)是失效的。下面给出一个新的坐标变换。系统(2)经变换

$$x = \frac{\zeta}{(\zeta^2 + \eta^2)^2}, y = \frac{\eta}{(\zeta^2 + \eta^2)^2}\quad (3)$$

以及时间变换 $dt_1 = (x^2 + y^2)^{-1} dt$, 化为系统

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt_1} &= -\eta + \left(\eta^2 - \frac{\zeta^2}{3}\right)(A_{20}\zeta^2 + A_{11}\zeta\eta + A_{02}\eta^2) - \\ &\quad \frac{4}{3}\zeta\eta(B_{20}\zeta^2 + B_{11}\zeta\eta + B_{02}\eta^2), \\ \frac{d\eta}{dt_1} &= \zeta + \left(\zeta^2 - \frac{\eta^2}{3}\right)(B_{20}\zeta^2 + B_{11}\zeta\eta + B_{02}\eta^2) - \\ &\quad \frac{4}{3}\zeta\eta(A_{20}\zeta^2 + A_{11}\zeta\eta + A_{02}\eta^2)\end{aligned}\quad (4)$$

这样, 系统(2)的无穷远点转化成系统(4)的原点。因为变换(3)是同胚变换, 所以系统(2)无穷远点与系统(4)的原点邻域的轨线拓扑结构是相同的。称系统(4)与系统(2)互为对偶系统。

定义 1 如果实系统的无穷远点(赤道环)充分小邻域的轨线均是闭轨且周期都为相同的常数, 则称该系统的无穷远点是等时中心或称该系统在无穷远点具有等时中心。

定义 2 如果系统(4)的原点为等时中心, 则称它的对偶系统(2)的无穷远点为拟等时中心。

有理系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{x^2 + y^2}(A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) - y, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{x^2 + y^2}(B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2) + x\end{aligned}\quad (5)$$

仅经过同胚变换(3)与等时间变换可化为系统(4)。显然, 如果系统(2)的无穷远点是拟等时中心, 则系统(5)的无穷远点为等时中心。

* 收稿日期: 2004-06-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60464001)

作者简介: 黄文韬(1966年生), 男, 博士, 教授; E-mail: huangwt@gliet.edu.cn

系统(4)经变换 $z = \zeta + \eta i, w = \zeta - \eta i$ 化为下列复系统

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dT} &= z + \frac{2}{3} b_{02} z^4 + \frac{1}{3} (2b_{11} + a_{20}) z^3 w + \\ &\quad \frac{1}{3} (a_{11} + 2b_{20}) z^2 w^2 + \frac{1}{3} a_{02} z w^3, \\ \frac{dw}{dT} &= -w - \frac{2}{3} a_{02} w^4 - \frac{1}{3} (2a_{11} + b_{20}) w^3 z - \\ &\quad \frac{1}{3} (b_{11} + 2a_{20}) z^2 w^2 - \frac{1}{3} b_{02} w z^3 \end{aligned} \quad (6)$$

称系统(4)与(6)互为伴随系统, 它们系数之间的关系如下:

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{1}{4} (A_{02} i - A_{11} - A_{20} i - B_{02} - B_{11} i + B_{20}), \\ a_{02} &= \frac{1}{4} (A_{02} i + A_{11} - A_{20} i - B_{02} + B_{11} i + B_{20}), \\ a_{11} &= \frac{1}{2} (-A_{02} i - A_{20} i + B_{02} + B_{20}), \\ b_{20} &= \overline{a_{20}}, b_{02} = \overline{a_{02}}, b_{11} = \overline{a_{11}} \end{aligned}$$

文[7]定义了复自治系统的复中心与奇点量, 文[2]定义了复自治系统的等时中心与周期常数, 从中得出: 如果复自治系统的系数满足共轭条件且坐标原点是中心(等时中心), 则它的伴随实系统的原点也是中心(等时中心)。因此, 系统(4)的中心与等时中心的必要条件可以由对它的伴随复系统(6)的奇点量与周期常数的计算得到。

2 系统无穷远点的中心条件

利用文[8]给出的计算原点奇点量的一般递推公式, 通过计算机符号运算与化简可得

定理1 系统(6)的前12个奇点量为

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 &= \frac{1}{3} (a_{11} a_{20} - b_{11} b_{20}), \mu_4 = \mu_5 = 0, \\ \mu_6 &= \frac{1}{9} (4a_{02} a_{20}^3 - a_{02} a_{20} b_{11}^2 + a_{11}^2 b_{02} b_{20} - 4b_{02} b_{20}^3), \\ \mu_7 &= \mu_8 = 0, \end{aligned}$$

(1) 当 $a_{20} b_{20} \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \mu_9 &= \frac{5}{72} (2a_{02} b_{02} - 3a_{20} b_{20}) \cdot \\ &\quad (2a_{02} a_{20}^3 - a_{02} a_{20}^2 b_{11} + a_{11} b_{02} b_{20}^2 - 2b_{02} b_{20}^3), \\ \mu_{10} &= \mu_{11} = 0, \end{aligned}$$

$$\mu_{12} = \frac{11}{60} a_{20}^2 b_{20}^2 (2a_{02} a_{20}^3 - a_{02} a_{20}^2 b_{11} + a_{11} b_{02} b_{20}^2 - 2b_{02} b_{20}^3),$$

(2) 当 $a_{20} = b_{20} = 0$ 时

$$\mu_9 = -\frac{1}{72} a_{02} b_{02} (a_{11}^3 b_{02} - a_{02} b_{11}^3), \mu_{10} = \mu_{11} = \mu_{12} = 0,$$

在上述 μ_k 的表达式中已置 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k-1} = 0, k = 2, 3, \dots, 12$ 。

由定理1可得

定理2 系统(6)前12个奇点量均为零, 当且

仅当下列3组条件之一成立:

$$(1) a_{11} a_{20} = b_{11} b_{20}, a_{02} a_{20}^3 = b_{02} b_{20}^3, a_{20} b_{20} \neq 0 \quad (7)$$

$$(2) a_{12} = 2b_{20}, b_{11} = 2a_{20}, a_{02} a_{20}^3 \neq b_{02} b_{20}^3, \\ a_{20} b_{20} \neq 0 \quad (8)$$

$$(3) a_{20} = b_{20} = 0, a_{02} b_{11}^3 = b_{02} a_{11}^3 \quad (9)$$

定理2给出了系统(6)及系统(4)原点成为中心的必要条件。在定理2中, 如果条件(1)或条件(3)成立, 则系统(6)右端系数满足广义对称原理^[7]的条件; 如果条件(2)成立, 系统(6)有通积分

$$F(z, w) =$$

$$\frac{z^3 w^3}{\sqrt{3 + 2b_{02} z^3 + 6a_{20} w z^2 + 6b_{20} w^2 z + 2a_{02} w^3}}$$

所以, 我们有

定理3 系统(4)和(6)的原点(相应地, 系统(2)的无穷远点)为中心的充分必要条件是定理2中的3个条件之一成立。

3 系统无穷远点的拟等时中心条件

系统的等时中心必须是中心, 因此按中心条件分3种情形讨论系统(6)的复等时中心条件。

情形1: 中心条件(7)式成立

因为 $a_{20} b_{20} \neq 0$, 由(7)式, 可令

$$a_{11} = s b_{20}, b_{11} = s a_{20}, a_{02} = h b_{20}^3, b_{02} = h a_{20}^3 \quad (10)$$

这里 h, s 是复常数。代入[2, 定理3.1]中周期常数的一般递推公式, 经过仔细的计算得以下定理4。

定理4 系统(6)原点的前3个非恒等于零的周期常数为

$$\tau_3 = -\frac{2}{3} a_{20} b_{20} (3 + a_{20}^2 b_{20}^2 h^2 + 3s),$$

$$\begin{aligned} \tau_6 &= \frac{1}{54} a_{20}^3 b_{20}^3 h (1 + a_{20} b_{20} h) (9 + a_{20}^2 b_{20}^2 h^2) \cdot \\ &\quad (-12 + 3a_{20} b_{20} h + a_{20}^2 b_{20}^2 h^2), \end{aligned}$$

$$\tau_9 = \frac{38}{945} a_{20}^4 b_{20}^4 h (1 + a_{20} b_{20} h) (-864 + 337 a_{20} b_{20} h)$$

在上述 τ_k 的表达式中已置 $\tau_1 = \dots = \tau_{k-1} = 0, k = 2, 3, \dots, 9$ 。

由定理4与(10)式容易得到: 系统(6)原点的前9个周期常数均为零的充分必要条件是下列2个条件之一成立

$$\begin{aligned} h = 0, s = -1, \text{即 } a_{02} = b_{02} = 0, a_{11} = -b_{20}, \\ b_{11} = -a_{20}, a_{20} b_{20} \neq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$h = -\frac{1}{a_{20} b_{20}}, s = -\frac{4}{3}, \text{即 } a_{02} = \frac{b_{20}^2}{a_{20}}, b_{02} = \frac{a_{20}^2}{b_{20}},$$

$$a_{11} = -\frac{4}{3} b_{20}, b_{11} = -\frac{4}{3} a_{20}, a_{20} b_{20} \neq 0 \quad (12)$$

假如(11)式成立, 系统(6)变为

$$\frac{dz}{dT} = z + \frac{b_{20} w^2 z^2}{3} - \frac{a_{20} w z^3}{3}$$

$$\frac{dw}{dT} = -\left(w - \frac{b_{20}w^3z}{3} + \frac{a_{20}w^2z^2}{3}\right) \quad (13)$$

由极坐标公式 $z = re^{i\theta}$, $w = re^{-i\theta}$, 可得 $\theta = \frac{1}{2i}(\log z - \log w)$ 。沿着系统(13)的轨线, θ 对 T 求导得 $\frac{d\theta}{dT} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z}\frac{dz}{dT} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dT}\right) = -i$ 。即 $\frac{d\theta}{dt} = i\frac{dT}{dt} = 1$, 所以系统(13)的原点是等时中心。

假如(12)式成立, 系统(6)变为

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dT} &= z - \frac{b_{20}w^3z}{3a_{20}} + \frac{2b_{20}w^2z^2}{9} - \frac{5a_{20}wz^3}{9} - \frac{2a_{20}z^4}{3b_{20}} \\ \frac{dw}{dT} &= -\left(w - \frac{2b_{20}w^4}{3a_{20}} - \frac{5b_{20}w^3z}{9} + \frac{2a_{20}w^2z^2}{9} - \frac{a_{20}wz^3}{2b_{20}}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

作变换 $z = \left(\frac{3}{a_{20}b_{20}}\right)^{\frac{2}{3}}b_{20}u$, $w = \left(\frac{3}{a_{20}b_{20}}\right)^{\frac{2}{3}}a_{20}v$, 则系统(14)变为

$$\begin{aligned} \frac{du}{dT} &= u - 6u^4 - 5u^3v + 2u^2v^2 - 3uv^3 \\ \frac{dv}{dT} &= -(v - 3u^3v + 2u^2v^2 - 5uv^3 - 6v^4) \end{aligned} \quad (15)$$

因为系统以原点为中心, 必存在一个积分因子 $M(u, v)$ 满足 $M(0, 0) = 1$ 。在变换

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{M(u, v)^{\frac{1}{4}}u(1 - 6uv^2 - 6v^3)^{\frac{11}{24}}}{(1 - 6u^3 - 6u^2v)^{\frac{1}{24}}}, \\ \tilde{v} &= \frac{M(u, v)^{\frac{1}{4}}v(1 - 6u^3 - 6u^2v)^{\frac{11}{24}}}{(1 - 6uv^2 - 6v^3)^{\frac{1}{24}}} \end{aligned}$$

下, 系统(15)变为 $\frac{d\tilde{u}}{dT} = \tilde{u}$, $\frac{d\tilde{v}}{dT} = -\tilde{v}$ 从而 $\frac{d\theta}{dT} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\tilde{u}}\frac{d\tilde{u}}{dT} + \frac{1}{\tilde{v}}\frac{d\tilde{v}}{dT}\right) = -i$, 即 $\frac{d\theta}{dt} = i\frac{dT}{dt} = 1$, 系统(14)的原点是等时中心。

情形 2: 中心条件(8)式成立

把(8)式代入文[2, 定理3.1]的递推公式, 经计算有 $\tau_3 = -\frac{2}{3}(a_{02}b_{02} + 9a_{20}b_{20})$ 。由 a_{ij} 与 b_{ij} 共轭及 $a_{20}b_{20} \neq 0$, 知 $a_{02}b_{02} \geq 0$, $a_{20}b_{20} > 0$, 因而 $\tau_3 < 0$ 。所以, 若(8)式成立, 系统(6)的原点不是等时中心。

情形 3: 中心条件(9)式成立

当 $a_{20} = b_{20} = 0$ 时有 $\tau_3 = -\frac{2}{3}a_{02}b_{02}$, $\tau_6 = \tau_9 = 0$ 。显然 $\tau_3 = \tau_6 = \tau_9 = 0$ 当且仅当 $a_{02} = b_{02} = 0$ 。在这个条件下, 系统(6)成为

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dT} &= z + \frac{2}{3}b_{11}z^3w + \frac{1}{3}a_{11}z^2w^2 \\ \frac{dw}{dT} &= -\left(w + \frac{2}{3}a_{11}w^3z + \frac{1}{3}b_{11}w^2z^2\right) \end{aligned} \quad (16)$$

作变换 $u = \frac{z\sqrt{1+a_{11}w^2z}}{\sqrt{1+b_{11}wz^2}}$, $v = \frac{w\sqrt{1+b_{11}wz^2}}{\sqrt{1+a_{11}w^2z}}$ 得

一新的系统, 与上面类似, 我们有

$\frac{d\theta}{dT} = i\frac{d\theta}{dt} = i\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dT} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dT}\right) = i(-i) = 1$
所以系统(16)的原点是等时中心。综合以上所有情形得

定理 5 系统(4)、(6)的原点是等时中心的充分必要条件是下列(17) - (19)式 3 组条件之一成立:

$$\begin{aligned} a_{02} &= b_{02} = 0, \\ a_{11} &= -b_{20}, b_{11} = -a_{20}, a_{20}b_{20} \neq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$a_{02} = \frac{b_{20}^2}{a_{20}}, b_{02} = \frac{a_{20}^2}{b_{20}},$$

$$a_{11} = -\frac{4}{3}b_{20}, b_{11} = -\frac{4}{3}a_{20}, a_{20}b_{20} \neq 0 \quad (18)$$

$$a_{20} = b_{20} = a_{02} = b_{02} = 0 \quad (19)$$

由定理 5 得以下定理 6。

定理 6 三次系统(2)(有理系统(5))的无穷远点是拟等时中心(等时中心)的充分必要条件是定理 5 的 3 组条件之一成立。

参考文献:

- [1] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.
- [2] LIU Y R, HUANG W T. A new method to determine isochronous center conditions for polynomial differential systems[J]. Bulletin des sciences mathématiques, 2003, 127(2): 133 - 148.
- [3] CHAVARRIGA J, GINÉ J, GARCÍA I. Isochronous centers of a linear center perturbed by fifth degree homogeneous polynomial[J]. J Comput Appl Math, 2000, 126(1, 2): 351 - 368.
- [4] BLOWS T R, ROUSSEAU C. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields[J]. Journal of Differential Equations, 1993, 104(2): 215 - 242.
- [5] 刘一戎. 一类高次奇点与无穷远点中心焦点理论[J]. 中国科学, 2001, 44A(1): 37 - 48.
- [6] LIU Y R, HUANG W T. Center and isochorous center at infinity for differential systems [J]. Bulletin des sciences mathématiques, 2004, 128(2): 77 - 89.
- [7] 刘一戎, 李继彬. 论复自治系统的奇点量[J]. 中国科学 A, 1989, (3): 245 - 255.
- [8] 刘一戎, 陈海波. 奇点量公式的推导与一类三次系统的前 10 个鞍点量[J]. 应用数学学报, 2002, 25(2): 295 - 302.

The Centers and Quasi-isochronous Centers at Infinity for a Class of Differential Systems

HUANG Wen-tao¹, LIU Yi-rong², ZHU Fang-lai¹

(1. Department of Computing Science and Mathematics, Guilin University of

Electronic Technology, GuiLin, 541004, Guangxi, China;

2. The Institute of Mathematics, Zhejiang Normal University Jinhua 321004, Zhejiang, China)

Abstract: The definitions of the isochronous center and the quasi-isochronous center at infinity for differential systems are introduced. By means of computations of singular point values and period constants, the problems of center conditions and quasi-isochronous center conditions at infinity for a class of cubic polynomial differential systems are solved. The conditions of infinity to be an isochronous center for a class of rational differential systems are also given.

Key words: infinity; center; isochronous center; quasi-isochronous center

(上接第 23 页)

Variational Method with Adaptive Two Regularization Parameters and Its Application in Noisy Image Restoration

YANG Zhao-xia¹, LU Feng^{2,3}, TIAN Qian-qian⁴

(1. Department of Scientific Computing and Computer Applications, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Sector Information Managment, Bureau of Guangzhou Municipal Finance, Guangzhou 510180, China;

3. Institute of Finance Science Research, Beijing 100040, China;

4. Department of Computer Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In noise removal by the approach of regularization, the regularization parameter is global. A variational model with two adaptive regularization parameters according to the different orientations, which constructed through the characters of different kinds of pixel in a noisy image, is presented for adaptively noisy image restoration. Moreover, a discrete scheme is constructed for a digital image through PDE, which facilitates the computation effectively.

Key words: adaptive regularization parameter; variational model; noise removal; PDE; discrete iteration