

连续双线性泛函与 Banach 空间凸性^{*}

黎永锦, 林洁珠

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 讨论了 Banach 空间 X, Y 上的双线性泛函所成的空间 $B(X, Y)$ 的凸性和光滑性与 Banach 空间 X, Y 凸性和光滑性的关系, 并给出在双线性泛函的 Hahn-Banach 保范延拓定理和 Riesz 表示定理等。

关键词: 双线性连续泛函; 一致凸; 严格凸; 光滑; 张量积

中图分类号: O177.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2006) 01-0017-03

由于各种凸性和光滑性在最佳逼近, 不动点等有很好的应用, 于是凸性理论的研究就显得非常重要。通过对 Banach 空间对偶空间的凸性和光滑性的研究, 从而得到原空间的相应性质的方法, 已得到很好的研究, 但是对 Banach 空间上的连续双线性泛函的研究还不够深入, 实 Hilbert 空间的内积就是线性空间上的双线性泛函。另外, 辛空间其实是一般的线性空间上有一个反对称的双线性泛函, 于是研究一般 Banach 空间上的双线性泛函的一般性质就变得很重要了。

1 定义和背景

定义 1^[1] Banach 空间 X 称为一致凸的, 如果对任何任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x, y \in S(X)$, $\|x + y\|/2 > 1 - \delta$ 时, 有 $\|x - y\| < \epsilon$ 。

定义 2^[1] Banach 空间 X 称为局部一致凸的, 如果对任何 $\epsilon > 0$, $x \in S(X)$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ 使得当 $y \in S(X)$, $\|x + y\|/2 > 1 - \delta$ 时, 有 $\|x - y\| < \epsilon$ 。

定义 3^[2] Banach 空间 X 称为弱局部一致凸, 如果对任何 $\epsilon > 0$, $x \in S(X)$, $f \in S(X^*)$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, x, f) > 0$, 使得当 $y \in S(X)$, $\|x + y\|/2 > 1 - \delta$ 时, 有 $|f(x - y)| < \epsilon$ 。

定义 4^[1] Banach 空间 X 称为一致光滑的, 如果对任何 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in S(X)$, $0 < \|y\| < \delta$ 时, 有 $(\|x - y\| + \|x + y\| - 2)/\|y\| < \epsilon$ 。

定义 5^[1] Banach 空间 X 称为强光滑的, 如果对任何 $x \in S(X)$, 当 $f_n \in S(X^*)$, $f_n(x) \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) 时, 有某个 $f \in S(X^*)$, 使得 $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ 。

定义 6^[1] 如果对每个 $x \in S(X)$, 在 $S(X^*)$ 中有唯一的支撑泛函, 则称 Banach 空间 X 是光滑的。Banach 空间 X 称为非常光滑的, 如果对每个 $x \in S(X)$, $J(x)$ 在 $S(X^{**})$ 中有唯一的支撑泛函。

本文中用到的其他凸性和光滑性的概念, 凸性与光滑性的各种相互关系可见文 [1]。

设 X, Y 为 Banach 空间, 它们的范数分别记为 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$, $X \times Y$ 为乘积空间, 在该空间上定义范数 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y$ 。

定义 7 设 X, Y, Z 为 Banach 空间, $F: X \times Y \rightarrow Z$ 称为双线性算子, 若

$$F(\lambda_1 x + \lambda_2 y, z) = \lambda_1 F(x, z) + \lambda_2 F(y, z)$$

$$F(x, \lambda_1 w + \lambda_2 z) = \lambda_1 F(x, w) + \lambda_2 F(x, z)$$

对任意的 $x, y \in X, w, z \in Y$ 成立。如果 F 是 $X \times Y$ 上的连续算子, 即当 $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ 时, $F(x_n, y_n) \rightarrow F(x, y)$ ($n \rightarrow \infty$), 则称 F 为双线性连续算子; 当 Z 是实数集 $\mathbb{R}$ 时, 称 F 为实连续双线性泛函, 本文中的 Banach 空间都是指实的 Banach 空间, 连续双线性泛函都是指实连续双线性泛函。

例 1 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上, 定义 $F(x, y) = \sum x_i y_i$, 则 F 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的双线性连续函数。

是否对所有的 Banach 空间都有非零连续双线性泛函存在呢? 回答是肯定的, 对任意 Banach 空间 X 和 Y , 由 Hahn-Banach 定理分别有非零连续线性泛函 f, g 存在, 因而 $f \otimes g$ 就是 $X \times Y$ 上的双连续线性泛函, 这里 $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$ 。

不难证明对双线性泛函 $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 连续等价于 f 是范数有界的, 即 $\|f\| \leq M$ 这里 $\|f\| =$

* 收稿日期: 2005-01-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471155); 广东省自然科学基金资助项目 (031608); 香港中山大学高等学术研究中心基金资助项目 (04M10)

作者简介: 黎永锦 (1963 年生) 男, 副教授; E-mail: stslj@mail.sysu.edu.cn

$\sup\{f(x, y); \|x\| = \|y\| = 1, x \in X, y \in Y\}$.

将 $X \times Y$ 上所有双线性连续泛函记为 $B(X, Y)$, 定义加法和数乘如下:

$$(F+G)(x, y) = F(x, y) + G(x, y)$$

$$(\lambda F)(x, y) = \lambda F(x, y)$$

不难验证 $B(X, Y)$ 在上面定义的范数下是完备的赋范线性空间。

2 主要结果

定理 1 (1) 若 $B(X, Y)$ 是严格凸, 则 X, Y 是光滑的;

(2) 若 $B(X, Y)$ 是光滑的, 则 X, Y 严格凸。

证明 (1) 若 X 不光滑, 则存在着 $x \in S(X)$, $f, g \in S(X^*)$ 且 $f \neq g$ 使得, $f(x) = 1 = g(x)$.

任给 $y \in Y$ 存在 $h \in S(Y^*)$ 使得 $h(y) = 1$. 令 $\Phi_1 = f \otimes h, \Phi_2 = g \otimes h$ 则 Φ_1, Φ_2 是双线性的, 且对任意的 $w \in X, v \in Y$ 有

$$|\Phi_1(w, v)| = |f(w)| |h(v)| \leq$$

$$\|f\| \|h\| \|w\| \|v\| = \|w\| \|v\|$$

因此 Φ_1 有界, 且 $\|\Phi_1\| \leq 1$. 由 $\Phi_1(x, y) = f(x)h(y) = 1$ 可知 $\|\Phi_1\| = 1$. 同理可得: $\|\Phi_2\| = 1$.

由于 $\|\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2\| \leq 1, \lambda + \mu = 1, 0 < \lambda, \mu < 1$ 且 $(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)(x, y) = 1$, 因而 $\|\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2\| = 1$, 所以 $B(X, Y)$ 不是严格凸的。

(2) 若 X 不是严格凸的, 则存在 $x, \bar{x} \in S(X), x \neq \bar{x}$ 和 $\lambda, \lambda_2 \in (0, 1)$ 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 使得 $\lambda_1 x + \lambda_2 \bar{x} \in S(X)$. 设 $\lambda_1 x + \lambda_2 \bar{x}$ 的支撑泛函为 f , 则对任意的 $\lambda \in (0, 1)$ 有 $\lambda x + (1-\lambda)\bar{x} \in S(X)$ 且 $f(x) = 1, f(\bar{x}) = 1$.

任给 $y \in Y$, 设 y 的支撑泛函为 g 令 $\Psi = f \otimes g$ 则 $\Psi \in B(X, Y)$.

定义算子:

$$M(x, y): B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F \mapsto F(x, y)$$

$$N(x, y): B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F \mapsto F(x, y)$$

显然 $M(x, y), N(x, y)$ 为线性泛函, 任给 $G \in S(B(X, Y))$ 有 $\|M(x, y)(G)\| = |G(x, y)| \leq 1$, 因此 $M(x, y) \in (B(X, Y))^*$, 且 $\|M(x, y)\| \leq 1$. 由 $M(x, y)(\Psi) = 1$ 可知 $M(x, y)$ 为 Ψ 的支撑泛函. 同理可证 $N(x, y)$ 为 Ψ 的支撑泛函. 显然 $M(x, y) \neq N(x, y)$, 所以 $B(X, Y)$ 不是光滑的。

定理 2 (1) 若 $B(X, Y)$ 是一致光滑的, 则 X, Y 都是一致凸的;

(2) 若 $B(X, Y)$ 是一致凸的, 则 X, Y 都是一致光滑的。

证明 (1) 若 X, Y 有一个不是一致凸的, 不妨设为 X 则 X^* 不是一致光滑的, 因此存在 $\epsilon_0 > 0$ 任给 η 存在 $f, g_n \in S(X^*)$ 使得 $(\frac{1}{2}\|f + g_n\|) > 1 - (1/\eta)$ 但 $\|f - g_n\| \geq \epsilon_0$.

任取 $g \in S(Y^*)$ 定义 $\Phi_n = f \otimes g, \Phi'_n = g_n \otimes g$ 则 $\Phi_n \in B(X, Y), \Phi'_n \in B(X, Y), \|\Phi_n\| = \|\Phi'_n\| = 1$. 由于 $\|\Phi_n + \Phi'_n\|/2 = \|f \otimes g + g_n \otimes g\|/2 = \|(f + g_n) \otimes g\|/2 = \|f + g_n\|/2 > 1 - 1/\eta$ 但 $\|\Phi_n - \Phi'_n\| = \|f \otimes g - g_n \otimes g\| = \|f - g_n\| \geq \epsilon_0$, 因此 $B(X, Y)$ 不是一致凸的。

(2) 假设 X^* 不是一致光滑的, 则存在 ϵ_0 , 任给 η 存在 $f \in S(X^*), g_n \in X^*$, 使得 $0 < \|f\| < 1/\eta$ 但 $\{\|f + g_n\| + \|f - g_n\|\}/\|g_n\| \geq \epsilon_0$. 任取 $h \in S(Y^*)$ 令 $\Phi_n = f \otimes h, \Psi_n = g_n \otimes h$ 显然 $\Phi_n, \Psi_n \in B(X, Y)$ 且 $\|\Phi_n\| = 1, 0 < \|\Psi_n\| < 1/\eta$ 但 $\{\|\Phi_n + \Psi_n\| + \|\Phi_n - \Psi_n\| - 2\}/\|\Psi_n\| = \{\|f \otimes h + g_n \otimes h\| + \|f \otimes h - g_n \otimes h\| - 2\}/\|g_n \otimes h\| = \{\|f + g_n\| + \|f - g_n\|\}/\|g_n\| \geq \epsilon_0$, 所以 $B(X, Y)$ 不是一致光滑的。

定理 3 若 $B(X, Y)$ 局部一致凸, 则 X, Y 都是强光滑的。

证明 反证法, 假设 X 不是强光滑的, 则由文 [1] 知道 X^* 不是局部一致凸的, 因而存在 ϵ_0 , 存在 $f \in S(X^*)$ 任给 η 存在 f 使得 $\|f + f\|/2 > 1 - 1/\eta$ 但 $\|f - f\| \geq \epsilon_0$. 取 $G \in S(Y^*)$ 令 $\Phi_0 = f \otimes G, \Psi_n = f \otimes G$, 则 $\Phi_0, \Psi_n \in B(X, Y), \|\Phi_0\| = \|\Psi_n\| = 1$ 但 $\|\Phi_0 + \Psi_n\| = \|f \otimes G + f \otimes G\| = \|f + f\|/2 > 1 - 1/\eta$ 且 $\|\Phi_0 - \Psi_n\| = \|f - f\| \geq \epsilon_0$ 所以与 $B(X, Y)$ 不是局部一致凸的矛盾。

类似于上面的一些技巧, 不难证明下面定理成立。

定理 4 若 $B(X, Y)$ 是弱局部一致凸的, 则 X, Y 都是非常光滑的。

Hahn-Banach 保范延拓定理是泛函分析的重要定理, 对双线性泛函, 有类似的结果成立。

定理 5 设 X, Y 为 Banach 空间, U, V 分别为 X, Y 的子空间, 若 $U \otimes V$ 是 $X \otimes Y$ 的子空间, 则任给 $\Phi \in B(U, V)$ 都存在 $\Psi \in B(X, Y)$ 使得 Ψ 为 Φ 的保范延拓, 即

$$(1) \Psi(x \otimes y) = \Phi(x \otimes y), \text{ 当 } x \in U, y \in V$$

$$(2) \|\Psi\| = \|\Phi\|$$

证明 由文 [3] 定理 1.1, 存在等距同构 $\Gamma: B(U \otimes V) \rightarrow (U \otimes V \parallel \circ \parallel_{\wedge})^*$, 使得 $\Gamma(\Phi) = \tilde{\Phi}$, 对 $x \in U, y \in V$ 有 $\Phi(x \otimes y) = \tilde{\Phi}(x \otimes y)$ 且 $\|\Phi\| = \|\tilde{\Phi}\|$. 因为 $\tilde{\Phi} \in (U \otimes V \parallel \circ \parallel_{\wedge})^*$, 由 Hahn-Banach 定理知道存在 $\tilde{\Phi}$ 的保范延拓 $T^* \in (X \otimes Y \parallel \circ \parallel_{\wedge})^*$ 使得当 $x \in U, y \in V$ 时, 有 $T^*(x \otimes y) = \tilde{\Phi}(x \otimes y)$ 且 $\|T^*\| = \|\tilde{\Phi}\|$. 记 T^* 在 $B(X \otimes Y)$ 的原象为 Ψ , 即 $\Gamma(\Psi) = T^*$, 所以 $\|\Psi\| = \|T^*\|$. $\Psi(x \otimes y) = T^*(x \otimes y)$, 从而 Ψ 为所求. 实际上, 当 $x \in U, y \in V$ 时, 有 $\Psi(x \otimes y) = T^*(x \otimes y) = \tilde{\Phi}(x \otimes y) = \Phi(x \otimes y)$ 且 $\|\Psi\| = \|T^*\| = \|\tilde{\Phi}\| = \|\Phi\|$, 因此 Ψ 为 Φ 的保范延拓.

Riesz 表示定理是 Hilbert 空间的重要定理, 对双线性泛函, 也有类似的结果成立.

定理 6 设 H 是实 Hilbert 空间, 则对任意的 $f \in B(H \times H)$ 存在唯一的连续线性算子 $T: H \rightarrow H$ $\|T\| = \|f\|$, 使得 $f(x, y) = (Tx, y)$.

证明 对任意的 $f \in B(H \times H)$ 固定 x 对 $f(x, \cdot) \in H^*$, 由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 φ_x 使得任给 y 有 $f(x, y) = (\varphi_x, y)$ 且 $\|\varphi_x\| = \|f(x, \cdot)\|$. 定义 $Tx = \varphi_x$, 则 T 为线性算子. 事实上, 对任意的 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in H$ $(\varphi_{T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}) =$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y) = \lambda_1 (\varphi_{Tx_1}, y) + \lambda_2 (\varphi_{Tx_2}, y) \text{ 于是 } T \text{ 是线性的.}$$

又因为 $\|Tx\| = \|f(x, \cdot)\| \leq \|x\| \cdot \|f\|$, 所以 $\|T\| \leq \|f\|$. 又因为 $|f(x, y)| = |(y, Tx)| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$, 故 $\|f\| \leq \|T\|$, 所以 $\|T\| = \|f\|$, 并且对任意的 x 和 y 有 $f(x, y) = (y, Tx) = (Tx, y)$.

参考文献:

- [1] DIESTEL J Geometry of Banach spaces, selected topics Lecture Notes in Math 485 [M]. Berlin Springer 1975
- [2] RAJA M Weak* locally uniformly rotund norms and descriptive compact spaces [J]. J Funct Anal 2003 197: 1-13
- [3] DIESTEL J, FOURE J, SWART J The projective tensor product [J]. Trends in Banach spaces and operator theory (Memphis TN 2001) [R]. Math 321 Amer Math Soc 2003 37-65
- [4] BANDYOPADHYAY P, FONF V P, LIN B L, et al Structure of nested sequences of balls in Banach spaces [J]. Houston J Math 2003 29: 173-193
- [5] BU Qinying, LIN P K Radon-Nikodym property for the projective tensor product of Kothe function spaces [J]. J Math Anal Appl 2004 293: 149-159

Bilinear Continuous Functional and Convexity of Banach Spaces

LI Yong-jin, LIN Jie-zhu

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The convexity and smoothness of Banach space $B(X, Y)$ which are all the bilinear continuous functional on Banach space X and Y are studied. Hahn-Banach theorem and Riesz representation theorem of bilinear continuous functional are obtained.

Key words: bilinear continuous functional; uniformly convex; strictly convex; smooth; tensor product