

反向上下解条件下的非线性算子的不动点定理*

尹建东

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 利用锥定义空间中的半序, 通过引进完全相对 σ -完备集这一概念得到满足反向上下解条件 ($Au_0 \leq u_0 < v_0 \leq Av_0$) 增算子 A 的多个不动点存在性定理以及满足反向上下解条件 ($A(u_0, v_0) \leq u_0 < v_0 \leq A(v_0, u_0)$) 混合单调算子 A 的耦合不动点定理。

关键词: 锥; 反向上下解; 完全相对 σ -完备集; 保号算子

中图分类号: O177.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2005) 05-0018-03

1 有关定义

在半序空间中研究非线性算子方程的可解性时, 增算子和混合单调算子起着很重要的作用。相应的结果也有很多(见文[1-3])。但是已有的这些结果一般要求锥 P 正规或更强的条件(见文[2]), 并且要求算子连续或具有某种凸(凹)性或 α 凸 ($-\alpha$ 凹) 性条件(见文[3])。特别是要在正向上下解条件下 ($u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0$ 或 $u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0$) 得到它们的不动点或耦合不动点。文[4]引进了相对 σ -完备集, 在半序线性空间中研究了混合单调算子的不动点的存在唯一性。文[5]研究了非线性算子方程有变分结构且满足反向上下解条件的情况。本文通过引进完全相对 σ -完备集这一概念, 得到具有反向上下解条件的不动点定理和混合单调算子的耦合不动点定理。在叙述主要结果之前, 先回顾和介绍一些基本概念。

设 E 是 Banach 空间, P 是 E 中的锥, $D \subset A$, 半序 $\leq$ 是由锥 P 导出的。 $x < y$ 当且仅当 $x \leq y$ 且 $x \neq y$ 。 θ 为 E 中的零元。

定义 1^[1] $A: D \rightarrow E$ 称为增算子是指对 $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2$ 有 $Ax_1 \leq Ax_2$ 。若存在 $x_0 \in D$ 使得 $Ax_0 = x_0$, 则称 x_0 为 A 的一个不动点。

定义 2^[1] $A: D \times D \rightarrow E$ 称为混合单调算子是指 $A(x, y)$ 关于 x 不减, 关于 y 不增。若存在 $(x_0, y_0) \in D \times D$ 使得 $x_0 = A(x_0, y_0), y_0 = A(y_0, x_0)$, 则称 (x_0, y_0) 为 A 的一个耦合不动点。

定义 3 对于增算子 A 而言, 若存在 $u, v \in E, u \leq v$ 使得 $Au \leq u, v \leq Av$, 则称 v, u 为 A 的反向上下解; 对于混合单调算子 A 而言, 若存在 $u, v \in E, u \leq v$ 使得 $A(u, v) \leq u, v \leq A(v, u)$, 则称 v, u 为 A 的反向上下解(相应的定义可见文[4])。

定义 4 若 D 中的每个单调递增且范数有界的序列在 E 中依序有最小上界, 每个单调递减且范数有界的序列在 E 中有最大下界, 则称 D 为完全相对 σ -完备集。

定义 5 $A: E \rightarrow E$, 若对任意 $x \geq \theta$ 有 $Ax \geq \theta$ 且对任意 $x \leq \theta$ 有 $Ax \leq \theta$, 则称 A 为保号算子。如 E 中的单位算子 I 为保号算子。

2 主要结果

定理 1 设 D 为 E 中的有界集, $A: E \rightarrow D$ 为单调增算子, $A(E)$ 为完全相对 σ -完备集, 满足

(1) 存在 $u_0 < \theta, \theta < v_0$, 使得 $Au_0 \leq u_0 < v_0 \leq Av_0$;

(2) 对 $0 < t < 1, \forall x < \theta$, 存在 $0 < \alpha = \alpha(t, x) < 1$ 以及 $0 < \eta = \eta(t, x) < 1 - t^\alpha$ 使得 $(1 - \eta)x \leq A(tx) \leq t^\alpha Ax$;

(3) 对 $t > 1, \forall x > \theta$, 存在 $1 < \beta = \beta(t, x) < 2$ 以及 $0 < \zeta = \zeta(t, x) < t^{\beta-1} - 1$ 使得 $t(1 + \zeta)Ax \leq A(tx) \leq t^\beta x$ 。

则 A 在 E 中至少存在一个正不动点和一个负不动点。

证明 作迭代序列

* 收稿日期: 2004-10-10

基金项目: 国家自然科学基金天元基金资助项目(A0424619)

作者简介: 尹建东(1975年生), 男, 博士研究生; E-mail: jifenfangchen@yahoo.com

$$u_n = A(u_{n-1}), u_n = A(v_{n-1}), n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

由归纳法易证: 对任意正整数 n , 有

$$u_n \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_1 \leq u_0 < v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{n-1} \leq v_n \quad (2)$$

由(2)式知 $\{u_n\}_0^\infty$ 为 D 中的单调递减序列, $\{v_n\}_0^\infty$ 为 D 中的单调递增序列, $\{u_n\}_0^\infty, \{v_n\}_0^\infty \subset D$, 且 D 为 E 中的有界集, 结合 $A(E)$ 为完全相对 σ -完备集知: 存在 $u^* \in E$ 使得 u^* 为 $\{u_n\}_0^\infty$ 的最大下界, 即对任意的正整数 n 都有 $u^* \leq u_n$, 且若存在 $\bar{u} \in E$ 使得 $\bar{u} \leq u_n$ ($n = 0, 1, \dots$) 成立, 则 $\bar{u} \leq u^*$ 。同样, 存在 $v^* \in E$, 使得 v^* 为 $\{v_n\}_0^\infty$ 的最小上界, 即对任意的正整数 n 都有 $v_n \leq v^*$, 并且若存在 $\bar{v} \in E$, 使得 $v_n \leq \bar{v}$, $n = 0, 1, \dots$, 则 $v^* \leq \bar{v}$ 。

又由 A 的单调递增性知, 对任意正数 n 有

$$Au^* \leq Au_n = u_{n+1} \leq v_{n+1} = Av_n \leq Av^*$$

令 $\bar{u} = Au^*, \bar{v} = Av^*$, 则 $\bar{u}$ 也为 $\{u_n\}_0^\infty$ 的一个下界, $\bar{v}$ 也为 $\{v_n\}_0^\infty$ 的一个上界, 由 u^* 的最大性与 v^* 的最小性知

$$\bar{u} \leq u^*, v^* \leq \bar{v} \quad (3)$$

且 $\bar{u} \leq u^* < \theta, \theta \leq v^* \leq \bar{v}$ 。下证

$$\bar{u} \geq u^*, v^* \geq \bar{v} \quad (4)$$

令 $t_0 = \sup\{t > 0 \mid u^* \leq t\bar{u}\}$ 。首先说明 t_0 是存在的。若这样的 t_0 不存在, 有2种情况: ① $t_0 = \infty$; ② 对 $\forall t > 0$, 有 $u^* \geq t\bar{u}$ 。

下面分别说明以上2种情况都不可能。对于①, 由 $\bar{u} \leq u^* < \theta$ 知, $\forall t > 1$ 都有 $u^* \geq t\bar{u}$ 。事实上, $u^* - t\bar{u} \geq \bar{u} - t\bar{u} = (t-1)(-\bar{u})$ 。由 $\bar{u} < \theta, t > 1$ 知 $(t-1)(-\bar{u}) \in P$ 。故 $(t-1)(-\bar{u}) \geq \theta$, 即 $u^* - t\bar{u} \geq \theta$ 。从而 $u^* \geq t\bar{u}$ 。所以①这种情况是不可能的。对于②, 取 $t_n > 0$ 且 $t_n \rightarrow (n \rightarrow +\infty)$, 有 $u^* \geq t_n \bar{u}$ 。令 $t_n \rightarrow +\infty$ 得 $u^* \geq \theta$ 与 $u^* < \theta$ 矛盾, 故②这种情况也不可能。综合上述得 t_0 是存在的且 $0 < t_0 \leq 1, u^* \leq t_0 \bar{u}$ 。下证 $t_0 = 1$ 。若 $0 < t_0 < 1$, 由条件(2)知, 对 $u^* < \theta$ 存在 $0 < \alpha = \alpha(t_0, u^*) < 1$ 以及 $0 < \eta = \eta(t_0, u^*) < 1 - t_0^\alpha$ 使得 $(1-\eta) \cdot u^* \leq A(t_0 u^*) \leq t_0^\alpha Au^* = t_0^\alpha \bar{u}$, 故 $u^* \leq \frac{t_0^\alpha}{1-\eta} \bar{u}$, 而 $\frac{t_0^\alpha}{1-\eta} > \frac{t_0}{1-\eta} > t_0$ 与 t_0 的定义矛盾, 即

$$t_0 = 1 \quad (5)$$

同样, 令 $s_0 = \inf\{s > 0 \mid \bar{v} \leq sv^*\}$, 则 $s_0 \geq 1$ 。下证 $s_0 = 1$ 。若 $s_0 > 1$, 由条件(3), 对 $v^* > \theta$, 存在 $1 < \beta = \beta(s_0, v^*) < 2$ 以及 $0 < \zeta = \zeta(s_0, v^*) < s_0^{\beta-1}$

-1 , 使得 $s_0(1+\zeta)Av^* \leq A(s_0 v^*) \leq s_0^\beta v^*$ 。故 $\bar{v} \leq \frac{s_0^{\beta-1}}{1+\zeta} v^*$, 而 $\frac{s_0^{\beta-1}}{1+\zeta} < \frac{s_0}{1+\zeta} < s_0$ 与 s_0 的定义矛盾, 即 $s_0 = 1$ (6)

由(5), (6)式知 $u^* \leq \bar{u}, \bar{v} \leq v^*$, 故(4)式成立。结合(3)式知 $u^* = \bar{u} = A(u^*), v^* = \bar{v} = A(v^*)$, 故 u^*, v^* 为 A 的2个不动点, 且 u^* 为 A 的负不动点, v^* 为 A 的正不动点。

推论 1 $A: E \rightarrow D$ 为单调递增的保号算子, D 为 E 中的有界集, $A(E)$ 为 E 中的完全相对 σ -完备集, 若存在 $u_0 < \theta$ 使得 $Au_0 \leq u_0$, 并对 $\forall x < \theta, 0 < t < 1$, 存在 $0 < \alpha = \alpha(t, x) < 1$ 以及 $0 < \eta = \eta(t, x) < 1 - t^\alpha$ 使得 $(1-\eta)x \leq A(tx) \leq t^\alpha A(x)$, 则 A 在 E 至少有一个负不动点。

证明 由定理1的证明可知该推论成立。

推论 2 $A: E \rightarrow D$ 为单调递增的保号算子, D 为 E 中的有界集, $A(E)$ 为 E 中的完全相对 σ -完备集, 若存在 $v_0 > \theta$ 使得 $v_0 \leq Av_0$, 并对 $\forall x > \theta, t > 1$, 存在 $1 < \beta = \beta(t, x) < 2$ 以及 $0 < \zeta = \zeta(t, x) < t^{\beta-1}$ 使得 $t(1+\zeta)Ax \leq A(tx) \leq t^\beta A(x)$, 则 A 在 E 中至少有一个正不动点。

证明 由定理1的证明过程可知该推论成立。

定理 2 设 D 为 E 中的有界集, $A: E \times E \rightarrow D$ 为混合单调算子, $A(E \times E)$ 为 E 中的完全相对 σ -完备集, 且 $A(x, y)$ 关于 x 为保号算子并满足

(1) 存在 $u_0 < \theta, \theta < v_0$ 使得 $A(u_0, v_0) \leq u_0, v_0 \leq A(v_0, u_0)$;

(2) 对 $0 < t < 1, \forall (x, y) \in E \times E, x < \theta, y > \theta$, 存在 $0 < \alpha = \alpha(t, x, y) < 1$ 以及 $0 < \eta = \eta(t, x, y) < 1 - t^\alpha$ 使得 $(1-\eta)x \leq A(tx, y) \leq t^\alpha A(x, y)$;

(3) 对 $t > 1, \forall (x, y) \in E \times E, x > \theta, y < \theta$, 存在 $1 < \beta = \beta(t, x, y) < 2$ 以及 $0 < \zeta = \zeta(t, x, y) < t^{\beta-1} - 1$ 使得 $t(1+\zeta)A(x, y) \leq A(tx, y) \leq t^\beta A(x, y)$ 。

则 A 在 $E \times E$ 中至少存在一个耦合不动点。

证明 作迭代序列 $u_n = A(u_{n-1}, u_{n-1}), v_n = A(v_{n-1}, v_{n-1}), n = 1, 2, \dots$, 由归纳法易证: 对任意正整数 n , 有

$$u_n \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_1 \leq u_0 < v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{n-1} \leq v_n \quad (7)$$

由(7)式知 $\{u_n\}_0^\infty$ 为 D 中的单调递减序列, $\{v_n\}_0^\infty$ 为 D 中的单调递增序列, $\{u_n\}_0^\infty, \{v_n\}_0^\infty \subset D$, 且 D 为 E 中的有界集, 结合 $A(E \times E)$ 为 E 中的完全相对 σ -完备集知: 存在 $u^* \in E$ 使得 u^* 为

$\{u_n\}_0^\infty$ 的最大下界。同样, 存在 $v^* \in E$, 使得 v^* 为 $\{v_n\}_0^\infty$ 的最小下界, 并且对任意的正整数 n 有 $u^* \leq u_n \leq v_n \leq v^*$ 。又由 A 的混合单调性知, 对任意正数 n 有

$$A(u^*, v^*) \leq A(u_n, v_n) = u_{n+1}$$

$$A(v^*, u^*) \geq A(v_n, u_n) = v_{n+1}$$

令 $\bar{u} = A(u^*, v^*)$, $\bar{v} = A(v^*, u^*)$, 则 $\bar{u}$ 也为 $\{u_n\}_0^\infty$ 的一个下界, $\bar{v}$ 也为 $\{v_n\}_0^\infty$ 的一个上界, 由 u^* 的最大性与 v^* 的最小性知

$$\bar{u} \leq u^*, v^* \leq \bar{v} \quad (8)$$

又由 $A(x, y)$ 关于 x 为保号算子知 $\bar{u} \leq u^* < \theta$, $\theta < v^* \leq \bar{v}$, 下证

$$\bar{u} \geq u^*, v^* \geq \bar{v} \quad (9)$$

令 $t_0 = \sup \{t > 0 \mid u^* \leq t\bar{u}\}$ 。仿定理 1 的证明可证这样的 t_0 是存在的并且 $0 < t_0 \leq 1$, $u^* \leq t_0 \bar{u}$ 。下证 $t_0 = 1$ 。若 $0 < t_0 < 1$, 由定理 2 条件 (2) 知, 对 (u^*, v^*) , 存在 $0 < \alpha(t_0, u^*, v^*) < 1$ 以及 $0 < \eta = \eta(t_0, u^*, v^*) < 1 - t_0^\alpha$ 使得 $(1 - \eta)u^* \leq A(t_0 u^*, v^*) \leq t_0^\alpha A(u^*, v^*) = t_0^\alpha \bar{u}$, 故 $u^* \leq \frac{t_0^\alpha}{1 - \eta} \bar{u}$,

而 $\frac{t_0^\alpha}{1 - \eta} > \frac{t_0}{1 - \eta} > t_0$ 与 t_0 的定义矛盾, 即

$$t_0 = 1 \quad (10)$$

同样, 令 $s_0 = \inf \{s > 0 \mid \bar{v} \leq s v^*\}$, 则 $s_0 \geq 1$ 。下证 $s_0 = 1$ 。若 $s_0 > 1$, 定理 2 条件 3, 对 (v^*, u^*) ,

存在 $1 < \beta = \beta(s_0, v^*, u^*) < 2$ 以及 $0 < \zeta = \zeta(s_0, v^*, u^*) < s_0^{\beta-1} - 1$, 使得 $s_0(1 + \zeta)A(v^*, u^*) \leq A(s_0 v^*, u^*) \leq s_0^\beta v^*$ 。故 $\bar{v} \leq \frac{s_0^{\beta-1}}{1 + \zeta} v^*$, 而 $\frac{s_0^{\beta-1}}{1 + \zeta} < \frac{s_0}{1 + \zeta} < s_0$ 与 s_0 的定义矛盾, 即

$$s_0 = 1 \quad (11)$$

由 (10), (11) 式知 $u^* \leq \bar{u}$, $\bar{v} \leq v^*$, 故 (9) 式成立。结合 (8) 式知 $u^* = \bar{u} = A(u^*, v^*)$, $v^* = \bar{v} = A(v^*, u^*)$, 故 (u^*, v^*) 为 A 的一个耦合不动点。

致谢: 作者衷心感谢周作领教授、李国祯教授的悉心指导和审稿人的有益建议!

参考文献:

- [1] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.
- [2] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用[J]. 数学学报, 1998, 41(6): 1121 - 1126.
- [3] ZHANG Z T. New Fixed Points Theorem of Mixed Monotone Operators and Applications[J]. S Math Anal Appl, 1996, 204: 307 - 319.
- [4] 赵增勤. 半序线性空间中增算子的不动点的存在唯一性[J]. 系统科学与数学, 1999, 19(2): 217 - 224.
- [5] 孙经先. 变分方法与反向上解[J]. 数学学报, 1994, 37(4): 512 - 514.

Fixed Point Theorems of Nonlinear Operators with Counter Upper-down Solution Condition

YIN Jian-dong

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The multiple fixed point theorem of increasing operator and coupled quasi-fixed point theorem of mixed monotone operator which satisfy the counter upper-down solution condition are studied by using the complete relative sigma-complete set. The partial ordering is defined by a cone of the real Banach space.

Key words: cone; counter upper-down solution; complete relative sigma-complete set; coupled quasi-fixed point